Bilgisayar Uygulamalarıyla

SAYISAL İŞARET İŞLEME

Ahmet H. KAYRAN
Ender M. EKŞİOĞLU

İstanbul Teknik Üniversitesi

No : Y.0029
N : 975 - 511 - 362-2

bın Adı : Bilgisayar Uygulamalarıyla Sayısal İşaret İşleme
bın Yazarı : Ahmet H. KAYRAN - Ender M. EKŞİOĞLU
nlayan : Birsen Yayınevi Ltd. Şti.
Cağaloğlu Yokuşu, Evren Çarşısı, No: 29/ 13
Cağaloğlu / İSTANBUL
Tel : (0212) 527 85 78 - 522 08 29
Fax : (0212) 527 08 95
e-mail:birsenyayin@isbank.net.tr
http:www.birsenyayin.com
i - Montaj : Mat Yapım
ak Baskı : Volkan Matbaası Tel : (0212) 613 89 89 - 90
ı : Lord Matbaası Tel : (0212) 674 93 54
: Güven Mücellithanesi Tel : (0212) 518 10 64

İSTANBUL 2004

Önsöz

Sayısal işaret işleme ve uygulamaları 1970'li yıllardan başlayarak mühendislik eğitiminde yüksek lisans seviyesinde uzmanlık dersleri olarak yer bulmaya başlamıştır. Günümüzde konunun kazandığı öneme paralel olarak, sayısal işaret işleme derslerinin lisans seviyesinde müfredatın ayrılmaz bir parçası olduğunu görüyoruz. Bunda konunun kazandığı önem ve yaygınlığın yanı sıra, tam bir olgunluğa erişmiş olmasının da payı vardır. İşaret işleme dersleri teoriyle pratiğin uygun bir şekilde dengelenebileceği ortamlar olarak görülmektedir. Geliştirilmiş olan eğitim amaçlı bilgisayar programları, öğrencilerin teorik bilgileri bilgisayarda kolayca uygulamalara dönüştürebilmelerini sağlamaktadır. Bu özellikleriyle giderek önem kazanan sayısal işaret işleme konusunda yabancı dillerde yetkin kitaplar mevcuttur. Ancak dilimizde kaynak sayısı oldukça azdır. Gözlemlediğimiz bu boşluğu biraz olsun gidermek amacıyla elinizdeki kitabı hazırladık. Bu kitap sayısal işaret işleme konusuna ilişkin kapsamlı giriş bilgilerini sunmayı amaçlamaktadır. Kitap mühendislik eğitimi gören öğrencilerin beşinci yarıyıldan başlayarak izleyebilecekleri düzeyde ve bu alanda başvuracakları ilk kitap olarak düşünülmüştür.

Birinci Bölümde ayrık-zamanlı işaretlere ve sistemlere ilişkin giriş bilgileri verilmektedir. Sayısal işaret işlemede çok önemli bir rol oynayan ayrık-zamanlı doğrusal zamanla-değişmeyen sistemler İkinci Bölümde anlatılmaktadır. Bu bölümde, ayrık-zamanlı bir sistemin giriş ve çıkış ilişkisini belirleyen birbirinden farklı fakat eşdeğer yöntemlere değinilmektedir.

Üçüncü Bölümde sayısal işaret işlemede önemli bir rol oynayan z-dönüşümü tanıtılmaktadır. z-dönüşümünün uygulamaları ise, Dördüncü Bölümde ele alınmaktadır. Ayrık-zamanlı sistemin transfer fonksiyonunun bulunması ve Fourier dönüşümü ile z-dönüşümü arasındaki ilişki bu bölümde incelenmektedir. Analog işaretlerin analizinde temel olan Fourier serisi ve Fourier dönüşümü Beşinci Bölümde anlatılmaktadır. Fourier serisi katsayılarının bulunması gösterilmekte ve Fourier dönüşümüne ait özellikler ve önemli analog işaretlerin Fourier dönüşümleri tablolarda verilmektedir. Bir işaretin zaman

/eya frekans domenlerinden birinde örneklenmesinin diğer domene olan etkisi \ltıncı Bölümde incelenmektedir. Zaman ve frekans domeninde örtüşme ile ;hannon örnekleme teoremi bu bölümde açıklanmaktadır.

Yedinci Bölümde ayrık-Fourier dönüşümünün (AFD) tanımı ve temel özel-ikleri tanıtılmaktadır. Ayrık-Fourier dönüşümünün hesaplanmasını etkin şe-:ilde gerçekleştiren hızlı Fourier dönüşümü (HFD) algoritmaları Sekizinci Bö-ümde ayrıntılı olarak verilmektedir. Dokuzuncu Bölümde sayısal süzgeç tasarı-nında genel ilkeler açıklanmaktadır. Sonlu-impuls cevaplı (FIR) süzgeçlere iliş-:in önemli özellikler ve tasarım yöntemleri Onuncu Bölümde ele alınmaktadır.)nbirinci Bölümde sonsuz impuls cevaplı (IIR) süzgeç tasarımı tartışılmak-adır. Bu bölümde, çeşitli dönüşümler kullanılarak analog süzgeçlerden IIR ayısal süzgeçlerin elde edilmesi aşamaları öğretilmektedir. Onikinci Bölümde ayısal süzgeç gerçekleştirilmesine ilişkin metodlar tartışılmaktadır. Sınırlı elime uzunluğunun ortaya çıkardığı hatalar Onüçüncü Bölümde açıklanmak-adır. Sayısal süzgeçlere özgü bir kavram olan limit salınımlar örneklerle ergilenmektedir.

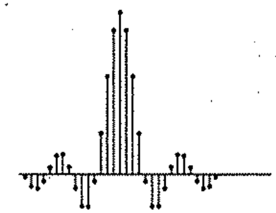
Kitapta bölüm içi örneklerinde ve bölüm sonlarında sayısal işaret işleme ilgisayar uygulamalarına yer verilmiştir. Bu uygulamalarda MATLAB® prog-amı esas alınmıştır. MATLAB bilim ve mühendislik uygulamaları için geliştiril-iş matris tabanlı bir paket programdır. Programın adı Matrix Laboratory ke-melerinin kısaltılmasından gelmektedir. MATLAB'in kullandığı programlama özdiziminin öğrenilmesi C ve benzeri programlama dillerinin öğrenilmesinden aha kolaydır. MATLAB, önceden yazılmış kodların yeni komut ve uygula-aların geliştirilmesinde kullanımına olanak vermekte ve sonuçların grafiksel österimini çok kolaylaştırmaktadır. MATLAB matris ve vektör tabanlı olduğu in, sayı dizileriyle çalışmanın doğal olduğu sayısal işaret işlemenin en yaygın ullanılan paket programlarından biri olmuştur. Kitapta MATLAB ile prog-amlama örnekleri ve alıştırmalarına yer vererek bilgisayarların sayısal işaret leme pratiğinde kullanımı için öğrencilere bir giriş sağlanacaktır.

Kitapta kullanılan MATLAB dosyalarına ve kitapla ilgili diğer bilgilere w.ehb.itu.edu.tr/~kayran/kitap adresinden ulaşabilirsiniz. Kitaptan ders tabı olarak faydalanacak olan öğretim üyeleri, kayran@ehb.itu.edu.tr adre-ne e-posta atarak hazırlanan ders notlarını bilgisayar dosyası olarak alabilir-r. Kitapla ilgili düzeltmelerinizi aynı adrese bildirebilirsiniz.

Kitabın metnini İstanbul Teknik Üniversitesi'nde verilen derslerde kul-nma imkanı bulduk. Metnin düzeltilmesinde yardımcı olan tüm meslektaşla-mıza ve öğrencilerimize teşekkür ederiz.

Ahmet H. KAYRAN
Ender M. EKŞİOĞLU

İçindekiler



Bölüm 1
AYRIK-ZAMANLI İŞARETLER VE SİSTEMLER

1.1 GİRİŞ

Sayısal işaret işleme, işaretlerin sayısal bilgisayar yada özel amaçlı sayısal donanımda bir sayılar dizisi olarak gösterilmesi ve bu işaret dizisi üzerinde çeşitli işlemler yaparak istenen bir bilgi yada büyüklüğün bu diziden çıkarılmasına dayanmaktadır. Sayısal işaret işleme 1960'lı yıllardan bu yana hızla gelişme gösteren bir bilim ve mühendislik alanıdır. Bu hızlı gelişme sayısal bilgisayar teknolojisi ve tümleşik devre tasarımındaki önemli ilerlemelerin bir sonucu olmuştur. Başlangıçta sayısal bilgisayarlar ve diğer sayısal donanım analog donanıma göre çok yer tutuyordu ve pahalıydı. Bu yüzden sayısal işaret işlemenin kullanımı gerçek-zaman olmayan bilimsel çalışmalar ve endüstri uygulamalarıyla sınırlıydı (örneğin petrol yada diğer yeraltı kaynaklarının araştırılması). Ancak sayısal devrelerin gittikçe hızlanması, küçülmesi ve ucuzlaması, sayısal işaret işleyicileri birçok ticari ürün ve uygulamanın ayrılmaz parçası haline getirdi. Bu uygulamalar için algoritma ve tasarımları gerçekleştiren sayısal işaret işleme de elektrik mühendisliğinin önemli dallarından biri oldu.

Sayısal işaret işleme tüm işaret işleme problemleri için tek geçerli çözüm değildir. Çok yüksek bant genişlikli işaretlerin, örneğin radyo frekansı (RF) işaretlerin işlenmesinde analog ve optik işaret işleme yöntemleri kullanılmaktadır. Bu işaretlerin örneklenmesi ve sayısallaştırılması sorun olmaktadır. Ancak genel olarak, eğer sayısal yöntemlerle işaret işleme mümkünse tercih edilmektedir. Bunda sayısal işaret işlemenin bazı avantajları rol oynamaktadır. Sayısal işlemciler, sayısal kelime uzunluğu gerekli doğruluğa uygun seçilerek istenen seviyede kesinlik sağlayabilirler. Analog devrelerin ise kullanılan devre elemanlarının çalışma toleranslarına bağlı olan bir kesinliği vardır. Sayısal işlemciler yazılım yada donanım hatasıyla devre dışı kalmadıkları sürece doğru ve kesin olarak çalışırlar. Analog devrelerde ise farklı ortam şartlarına (sıcaklık, basınç, nem vb.) bağlı olarak çalışma karakteristiği değişebilir. Sayısal işlemcilerin elektriksel gürültüye duyarlılıkları yok denecek seviyede düşüktür. Sayısal dizinin kayan-nokta (floating point) biçiminde gösterilmesi kelime uzunluğu sabit kalsa bile işaret dizisinin dinamik aralığının isteğe bağlı olarak sınırsız şekilde değiştirilebilmesini sağlar. Sayısal işlemcilerde yazılım değişikliği ile, donanıma el değmeden yapılan işlemlerde değişiklik ve güncelleme yapmak mümkündür. Sayısal bilginin saklanmasının maliyeti çok daha düşük ve güvenilirliği daha yüksektir. Sayısal işaretler güvenlik için şifrelenebilir, hatalara karşı hata sezici ve düzeltici bir kodla kodlanabilir ve bilgi kaybolmamak şartıyla işaretin boyutunu küçültecek şekilde sıkıştırılabilirler. Bütün bunların sonucunda, sayısal işaret işleme güncel elektronik sistemlerde önemli bir rol oynamaktadır. Bunların arasında ses, görüntü, veri ve video iletim ve saklama sistemleri; tıbbi görüntüleme ve teşhis sistemleri; radar, sonar ve uydu uzaktan görüntüleme sistemleri; sayısal kontrol sistemleri yer almaktadır.

1.2 İŞARETLERİN SINIFLANDIRILMASI

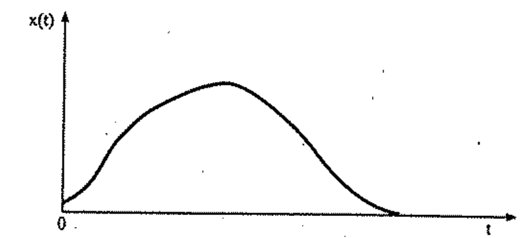
Bu kitabın konusu işaret işleme ile ilgilidir. Bu nedenle önce işaretin ne olduğu tartışılmalıdır. Fiziksel bir sistemin davranışına yada durumuna ilişkin bilgi taşıyan ve bir yada daha fazla bağımsız değişkene bağlı olarak değişen her türlü büyüklüğe işaret diyoruz. Buna göre konuşma, radyo dalgaları ve elektrokardiyografi işarete örnek gösterilebildiği gibi bir ülkedeki işsizlik oranı, bankaların faiz oranları ve uzay araçlarından yeryüzüne gönderilen görüntüler de işaret olarak kabul edilebilir.

İşaretin Boyutu

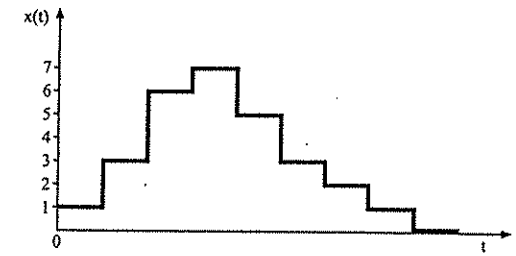
İşaret bir, iki veya N bağımsız değişkenin fonksiyonu olabilir. Örneğin, konuşma işareti yada bankaların faiz oranları bir bağımsız değişkenin, yani zamanın fonksiyonudur. Bu tür işaretler bir-boyutlu işaretler olarak adlandırılacaktır. Dağılmış parametreli sistemlere ait işaretin değişkenlerinden biri zaman diğerleri ise uzaysal boyutlardadır. Görüntü işaretinde ise her iki bağımsız değişken de uzaysal boyutludur. Bu kitapta sadece zamana göre değişen bir boyutlu işaretler incelenecektir.

İşaretin Türleri

İşaretleri zamana göre değişimleri dikkate alınarak iki büyük grupta toplamak mümkündür:



Şekil 1.1 Genliği kuvantalanmamış sürekli-zamanlı işaret. İşaretin genliği sürekli değerler alır. "Analog işaret" adı verilen işaret bu türdendir.



Şekil 1.2 Genliği kuvantalanmış sürekli zamanlı işaret. İşaretin genliği ayrık değerler alabilir.

a) Sürekli-zamanlı işaretler

b) Ayrık-zamanlı işaretler

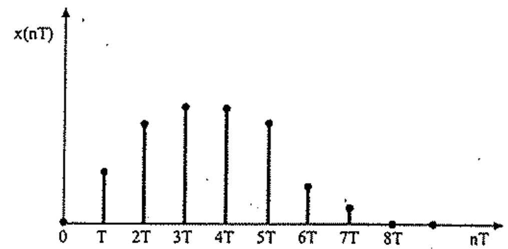
Eğer işaret, Şekil 1.1 ve 1.2'de verildiği gibi sürekli bir zaman aralığı içinde tanımlanırsa sürekli-zamanlı işaret olarak adlandırılır. Örneğin, konuşma, ısı fonksiyonları sürekli-zamanlı işaretlerdir. Şekil 1.3 ve 1.4'te verilen işaretler zamanın sadece belirli anlarında tanımlanmış oldukları için ayrık-zamanlı işaretlerdir. Günlük olarak her öğle İstanbul'da kayıt edilen hava sıcaklığı ayrık-zamanlı bir işareti oluşturur. Ayrık zaman aralıkları milisaniye, dakika veya gün olabilir.

İşaretleri genliklerine göre de iki gruba ayırmak mümkündür.

a) Sürekli-genlikli işaretler

b) Ayrık-genlikli işaretler

Şekil 1.1 ve 1.3'teki gibi sürekli bir aralık içinde herhangi bir değeri alabilen işaret sürekli genliklidir. Isı fonksiyonları ve bir taşıtın hızı sürekli genliklidir.



ekil 1.3 Genliği kuvantalanmamış ayrık-zamanlı işaret. Şekil 1.1'deki işaretin T anlarında örneklenmesiyle elde edilir.

ncak, Şekil 1.2 ve 1.4'te görüldüğü gibi bazı işaretler sadece ayrık değerler labilmektedir. Örneğin, bankaların faiz oranları ayrık-genlikli işaretlerdir. erçekten faiz oranları %5, %13.5, %10.25 gibi ayrık değerlerle ifade edilir.

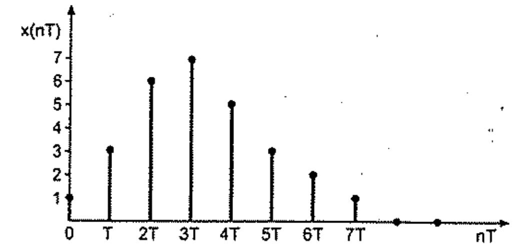
nalog İşaretler

Iem zamana hem de genliğe göre sürekli olan işaretler analog işaret olarak dlandırılır. Klasik devreler ve sistemler teorisinde karşılaşılan akım ve gerilim üründen işaretler analog işaretlerdir. Yani, sürekli zamanlı işaret sürekli bir ralık içinde herhangi bir değeri alabilir.

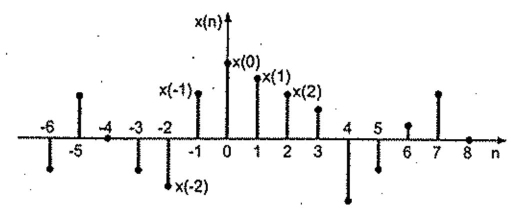
ayısal İşaretler

yrık zamanlı işaretin genliği sadece ayrık değerler alabiliyorsa bu işarete ayısal işaret adı verilir. Telgraf ile gönderilmiş bir mesaj sayısal bir işarettir. u mesaj sadece alfabe karakterleri, sayılar, nokta ve virgül gibi simgeler en oluşan sınırlı bir kümeden elemanlarını almaktadır. Pratikte bu simgeler izgiler ve noktalardan veya eşdeğer olarak 1'ler ve 0'lardan oluşmuştur. Sayısal şaretlerin diğer bir yaygın uygulama alanı sayısal bilgisayarlardır. Kullanılan ilgisayarın kelime uzunluğuna bağlı olarak işaretin değeri sınırlanır. Bit sayısı olan bir bilgisayarda birbirinden farklı 2^B ayrık işaret gösterilebilir. Örneğin, bitlik bir bilgisayarda 256 farklı sayısal işaret değeri gösterilebilir.

Ayrık-zamanlı işareti bir sayısal işarete dönüştürmek için her ayrık andaki enliği bir kuvantalama seviyesine atamak gerekir. Bu atama sırasındaki yuarlatmadan dolayı ortaya çıkacak hata kuvantalama hatası olarak adlandırılır. şaretleri zamana ve genliğe göre sınıflandırılmalarından başka, rastgele ve eterministik işaret olarak da iki gruba ayırmak mümkündür.



Şekil 1.4 Genliği kuvantalanmış ayrık-zamanlı işaret. "Sayısal işaret" (digital signal) bu türdendir.



Şekil 1.5 Sabit bir örnekleme aralığı ile elde edilen sayısal işaretlerin grafiksel gösterilimi.

Deterministik (Gerekirci) İşaretler

Bu çeşit işaret genellikle zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu fonksiyon ya analitik bir ifade ya da bir diferansiyel denklemin çözümüdür. İşaretin her an aldığı değer kesin olarak bu fonksiyon tarafından belirtilmektedir. Bu durumda işaret deterministik olarak adlandırılır. Örneğin, sinüs fonksiyonu bu türden bir işarettir.

$$s(t) = A\sin(wt + \phi) \tag{1.1}$$

Sinüs fonksiyonunda olduğu gibi, deterministik işaretin herhangi bir anda alacağı değer önceden belirlidir. Ancak, deterministik işaretler belirlenen değerleri dışında başkaca bir bilgi taşımadıkları için gerçek işaretlerin gösteriliminde yetersiz kalabilirler. Bu nedenle, gerçek işaretlerin gösteriliminde genellikle rastgele işaretler kullanılır.

Rastgele İşaretler

Bir işaretin herhangi bir anda aldığı kesin değer değil, alabileceği değerlerin olasılık dağılımı biliniyorsa bu işaretlere rastgele işaretler denir. Bu çeşit bir işaret $p_s(x,t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanır.

$$p_s(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{olasılık}\{x < s(t) < x + \Delta x\}}{\Delta x} \tag{1.2}$$

Eğer rastgele işaretin istatistiksel özellikleri zamanla değişmiyorsa, olasılık yoğunluk fonksiyonu zamandan bağımsızdır. Yani,

$$p_s(x,t) = p_s(x) \tag{1.3}$$

olmaktadır. Bu kitapta karşılaşacağımız işaretler genellikle deterministik işaretlerdir. Ancak, yuvarlatma ve kuvantalama hatalarının hesabında rastgele işaretler kullanılacaktır.

1.3 AYRIK-ZAMANLI İŞARETLER VEYA DİZİLER

Ayrık-zamanlı işaret x bir dizi sayıdan oluşur ve dizinin sayıları x_n, $x(n)$ veya $x(nT)$ biçiminde gösterilir. $x(nT)$ gösteriliminde, n bir tam sayı olup dizinin sürekli-zamanlı $x(t)$ işaretinin $t = nT$ anlarında örneklenmesinden elde edildiğini göstermektedir. Dizinin sürekli-zamanlı bir işaretten örnekleme yoluyla elde edilmediği durumlar dışında $x(n)$ gösterilimi kullanılacaktır. Metametiksel olarak x dizisinin n. elemanı $x(n)$ biçiminde gösterilirken $\{x(n)\}$, sonlu veya sonsuz uzunluklu tüm diziyi gösterir. Ancak, burada genel uygulamaya uygun olarak $x(n)$ hem dizinin elemanı hem de dizinin tamamı için kullanılacaktır. n'nin sabit veya değişken olmasına bağlı olarak $x(n)$'nin dizinin n. elemanı veya tamamı olduğuna karar verilir. Ancak dizinin sabit bir sayı ile çarpımı ve iki dizinin toplamı gibi durumlarda belirsizliği önlemek için küme gösterilimi kullanılır:

$$\alpha\{x(n)\} = \{\alpha x(n)\} \tag{1.4}$$

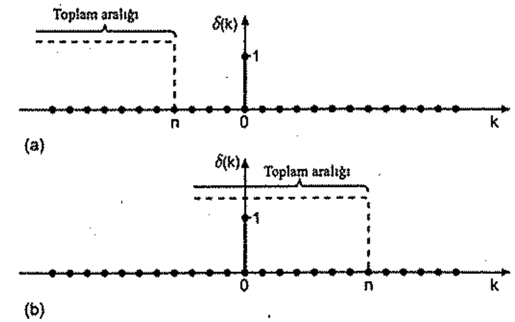
$$\{x(n)\} + \{y(n)\} = \{x(n) + y(n)\} \tag{1.5}$$

Sayısal İşaretlere Örnekler

Sayısal işaret işlemede bazı önemli dizilere özel adlar ve notasyonlar verilir. Birim-örnek veya impuls dizisi şöyle tanımlanır:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \ \text{için} \\ 0 & n \neq 0 \ \text{için} \end{cases} \tag{1.6}$$

$\delta(n)$ isminden de anlaşılacağı üzere analog sistem teorisinde kullanılan Dirac delta fonksiyonuna benzer. Ayrık-zamanlı sistem teorisinde önemli bir rol



Şekil 1.6 (1.8) ifadesindeki toplamın grafiksel gösterilimi. a) $n < 0$ için; b) $n > 0$ için.

oynar. Birim-basamak dizisi

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geqslant 0 \ \text{için,} \\ 0 & n < 0 \ \text{için} \end{cases} \tag{1.7}$$

biçiminde tanımlanır. $u(n)$ dizisi birim-örnek dizisiyle ilgilidir.

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) \tag{1.8}$$

veya

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \tag{1.9}$$

Benzer şekilde $\delta(n)$ dizisi de birim-basamak dizisinden elde edilebilir. Şekil 1.6'da toplam ilişkileri görülmektedir.

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \tag{1.10}$$

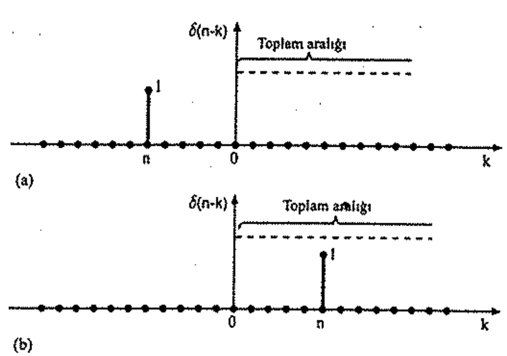
Birim-basamak dizisi, üstel dizi gibi diğer sayısal işaretlerin tanımında da kullanılabilir.

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

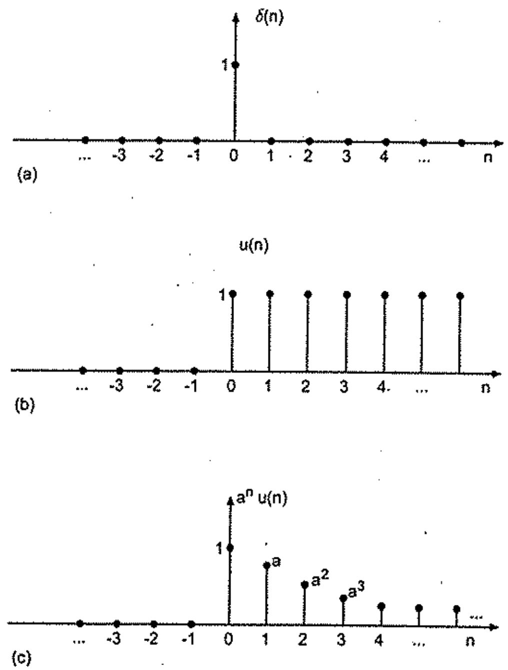
Birim impuls, birim-basamak ve üstel diziler Şekil 1.7'de gösterilmiştir. Benzer şekilde sinüzoid diziler ve kompleks üstel diziler tanımlanabilir.

$$x(n) = A\cos(w_o n + \Phi) \tag{1.12}$$

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} \tag{1.13}$$



Şekil 1.7 (1.9) ifadesindeki toplamın grafiksel gösterilimi. a) $n < 0$ için; b) $n > 0$ için.



Şekil 1.8 Bazı önemli dizilerin grafiksel gösterilimi. a) Birim-darbe dizisi; b) Birim-basamak dizisi; c) Üstel dizi. $(0 < a < 1)$

Dizinin Ötelenmesi

Diziler üzerindeki en önemli işlem, $x(n)$ dizisini öteleme operasyonudur.

$$y(n) = x(n - n_0) \tag{1.14}$$

n_0 kadar ötelenmiş $x(n)$ dizisi yeni bir dizi oluşturur. Öteleme n_0'ın pozitif olması durumunda gecikme, negatif olması durumunda ise ilerleme olarak adlandırılır. Herhangi bir ayrık-zamanlı işaret çarpılmış ve ötelenmiş birim impuls dizilerinin toplamı biçiminde yazılabilir.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{1.15}$$

Periyodik Diziler

Bir $x(n)$ işareti tüm n değerleri ve sabit bir N sayısı için

$$x(n) = x(n + N) \tag{1.16}$$

koşulunu sağlıyorsa periyodiktir. (1.16)'nın geçerli olduğu en küçük N değeri $x(n)$'nin periyodudur. Periyodik ve sürekli-zamanlı işaretin örneklenmesiyle oluşan ayrık-zamanlı dizinin periyodik olabilmesi için T örnekleme aralığı olmak üzere, NT'nin sürekli zamanlı işaretin periyodunun tam katı olması gerekir. Örnek olarak,

$$x(n) = e^{jw_0 n} \tag{1.17}$$

işareti için $2\pi/\omega_0$ tam sayı olursa $x(n)$'nin periyodu vardır ve $N = 2\pi/\omega_0$ olur. Eğer $2\pi/\omega_0$ rasyonel bir sayı ise periyot $N = (2\pi/\omega_0)m$, $m > 1$ olarak verilir. $2\pi/\omega_0$ rasyonel değilse $x(n)$ periyodik değildir. Aşağıdaki örneklerde bu durumu görebiliriz.

1. $x(n) = e^{j(\pi/6)n}$ periyodiktir, $N = 12$.
2. $x(n) = e^{j(8\pi/31)n}$ periyodiktir, $N = 31$.
3. $x(n) = e^{j(n/6)}$ periyodik değildir.

Örnek 1.1 $x_1(n) = e^{j(\pi/6)n}$ işaretini MATLAB'de oluşturalım ve çizdirelim. Bu karmaşık (kompleks) değerli dizinin gerçel ve sanal bölümlerini ayrı ayrı çizdireceğiz.

```
n=[0:20*pi];x1=exp(j*pi/6.*n);% zaman vektörü n ve x1 oluşturuluyor.
subplot(2,1,1); stem(n,real(x1));
title('x1 işaretinin gerçel bölümü');xlabel('n')
subplot(2,1,2); stem(n,imag(x1));
title('x1 işaretinin sanal bölümü');xlabel('n')
```

Dizilerin Enerjisi ve Ortalama Gücü

Analog işaretlerde olduğu gibi bir $x(n)$ dizisinin de ortalama gücü tanımlanabilir.

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=-N/2}^{N/2} |x(n)|^2$$

Sayısal işaretin enerjisi ise

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

olarak tanımlanır. Enerjisi sonlu olan diziler enerji işareti olarak adlandırılır.

Örnek 1.2 $x(n) = e^{j(\pi/6)n}$, $0 \leqslant n \leqslant 100$ işaretinin enerjisini MATLAB'de bulalım.

```
n=[0:100]; x=exp(j*pi/6.*n);% zaman vektörü n ve x(n) oluşturuluyor.
Ex=sum(x.conj(x));   %% bir metod
Ex2=sum(abs(x).^2);  %% diğer bir metod
```

1.4 AYRIK-ZAMANLI SİSTEMLER VE ÖZELLİKLERİ

Ayrık-zamanlı sistem, Şekil 1.9'da görüldüğü gibi, $x(n)$ giriş işaretini (dizisini) bir çıkış işaretine (dizisine) dönüştüren bir dönüşüm kuralıdır. Eğer $x(n)$ ve $y(n)$ sonlu sayıda genlik değerleri alabiliyorsa bu ayrık zamanlı sistem sayısal sistem olarak adlandırılır. Giriş-çıkış ilişkisi sembolik olarak

$$\{x(n)\} \xrightarrow[\text{sistem}]{} \{y(n)\} \tag{1.18}$$

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] \tag{1.19}$$

şeklinde gösterilebilir. $\mathcal{T}[\cdot]$ sisteme ilişkin dönüşüm kuralını gösteren matematiksel bir operatördür.

Şekil 1.9 $x(n)$ girişli ve $y(n)$ çıkışlı ayrık-zamanlı sistem.

Sayısal işaret işlemede karşılaşılan sistemlerin çoğunluğu doğrusal, zamanla-değişmeyen, nedensel ve kararlı olan sistemlerdir. Şimdi bu kavramları kısaca açıklayacağız.

Doğrusallık

Bir sistemin doğrusallığı, çarpımsallık ve toplamsallık ilkelerini sağlamasıyla tanımlanır. Buna göre, herhangi iki giriş dizisi $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ sırasıyla $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ çıkış dizilerini üretsin:

$$y_1(n) = \mathcal{T}[x_1(n)] \tag{1.20}$$

$$y_2(n) = \mathcal{T}[x_2(n)] \tag{1.21}$$

a ve b herhangi iki sabit sayı olduğuna göre $\mathcal{T}[\cdot]$ sisteminin doğrusal olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdadır.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[ax_1(n) + bx_2(n)] &= \mathcal{T}[ax_1(n)] + \mathcal{T}[bx_2(n)] \\ &= a\mathcal{T}[x_1(n)] + b\mathcal{T}[x_2(n)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned} \tag{1.22}$$

(1.22) koşulunu sağlamayan sistemler doğrusal olmayan (non-linear) sistemler olarak adlandırılır.

Örnek 1.3

$$y(n) = 8x^2(n-2) \tag{1.23}$$

Sayısal bir süzgecin cevabı yukarıda verildiğine göre doğrusallığını belirleyiniz.

Çözüm. (1.23) dönüşüm kuralından

$$\mathcal{T}[ax(n)] = 8a^2x^2(n-2) \tag{1.24}$$

olarak bulunur. a sabit bir katsayı olup, birden farklıdır ($a \neq 1$). Öte yandan

$$a\mathcal{T}[(x(n)] = 8ax^2(n-2) \tag{1.25}$$

Açık olarak,

$$\mathcal{T}[ax(n)] \neq a\mathcal{T}(x(n)) \tag{1.26}$$

Dolayısıyla süzgeç doğrusal değildir. □

Örnek 1.4 Eğer sayısal süzgecin $x(n)$ girişine cevabı

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = n^3 x(n+1) \tag{1.27}$$

olarak verilirse, sistemin doğrusal olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bu durum için,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[ax_1(n) + bx_2(n)] &= n^3(ax_1(n+1) + bx_2(n+1)) \\ &= an^3 x_1(n+1) + bn^3 x_2(n+1) \\ &= a\mathcal{T}[x_1(n)] + b\mathcal{T}[x_2(n)] \end{aligned} \tag{1.28}$$

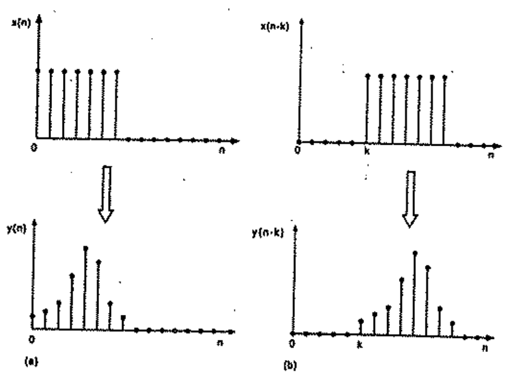
Öyleyse, (1.27)'deki sistem doğrusaldır. □

Zamanla Değişmezlik

Eğer sayısal bir sistemin giriş-çıkış ilişkisi zamanla değişmiyorsa sistem zamanla-değişmeyen olarak adlandırılır. Bu sistem, uygulanan bir x giriş dizisine uygulama anından bağımsız olarak aynı y çıkış dizisini üretiyor demektir. Şekil 1.10'da gösterildiği gibi, bir sistemin zamanla değişmez olması için gerek ve yeter şart sistemin tüm ilk koşulları sıfır olmak üzere tüm giriş işaretleri için

$$\mathcal{T}[x(n-k)] = y(n-k) \tag{1.29}$$

olmasıdır.



Şekil 1.10 Zamanla değişmeme: a) Sistemin $x(n)$ girişine cevabı; b) Sistemin geciktirilmiş $x(n-k)$ girişine cevabı.

Örnek 1.5 Sayısal bir sistem

$$y(n) = 4nx(n) \tag{1.30}$$

denklemiyle karakterize edilsin. Zamanla-değişmezlik özelliğini inceleyiniz.

Çözüm. (1.30)'daki sistemin ötelenmiş $x(n-k)$ giriş dizisine cevabı

$$\mathcal{T}[x(n-k)] = 4nx(n-k) \tag{1.31}$$

olarak bulunur. Oysa (1.29) uyarınca çıkış dizisi de ötelenmelidir. Yani,

$$y(n-k) = 4(n-k)x(n-k) \tag{1.32}$$

olmalıdır. (1.31) ve (1.32)'den

$$y(n-k) \neq \mathcal{T}[x(n-k)] \tag{1.33}$$

sonucu elde edilir ve sistem zamanla değişirdir. □

Örnek 1.6 Aşağıdaki fark denklemiyle ifade edilen sayısal sistemin zamanla değişmediğini gösteriniz.

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = x(n) + 2x(n-1) \tag{1.34}$$

Çözüm. Bu sistem için

$$\mathcal{T}[x(n-k)] = x(n-k) + 2x((n-1)-k) = y(n-k) \tag{1.35}$$

olduğuna göre sistem zamanla değişmezdir. □

Nedensellik

Eğer herhangi bir anda sistemin çıkışı sadece o andaki ve geçmişteki girişlerine bağlıysa o sisteme nedensel sistem denir. Daha açık bir anlatımla, nedensel sistemlerde sistemin çıkışının bulunmasında gelecekteki giriş değerlerine ihtiyaç duyulmaz.

Kararlılık

Sınırlı değerli bir giriş dizisinin sınırlı değerli bir çıkış dizisi ürettiği sistemlere kararlı sistemler denir. Bu tanım sınırlı-giriş sınırlı-çıkış (SGSÇ) anlamında kararlılığı ifade eder. Yani, M_1 ve M_2 sonlu sayılar olmak üzere

$$|x(n)| \leqslant M_1 \quad \text{tüm } n \text{ için}$$

olan herhangi bir giriş dizisine kararlı sistemin cevabı

$$|y(n)| \leqslant M_2 \quad \text{tüm } n \text{ için}$$

olan bir çıkış dizisi olacaktır. Bazı sistemler doğal olarak bu özelliğe sahiptir. Örneğin, pasif analog sistemler daima kararlıdır. Sayısal sistemlerdeki kararlılık II. Bölümde impuls cevabı ve IV. Bölümde de transfer fonksiyonu yardımıyla incelenecektir.

REFERANSLAR

1. J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing, Principles, Algorithms and Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
2. B. Porat, *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1997.
3. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing, A Computer Based Approach*, Mc Graw-Hill, 2001.
4. S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4^{th} edition, Prentice-Hall, 2002.
5. S. Ertürk, *Sayısal İşaret İşleme*, Birsen Yayınevi, 2003.

PROBLEMLER

1.1 Bu kitapta aşağıdaki özellikler çeşitli yerlerde kullanılacaktır.

a) Aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösteriniz.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \text{ için,} \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \text{ için} \end{cases}$$

b) $|\alpha| < 1$ olduğuna göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

1.2 Şekil 1.11'de ayrık-zamanlı $x(n)$ işareti gösterilmektedir. Aşağıdaki şıkların herbiri için bulunacak işareti çiziniz.

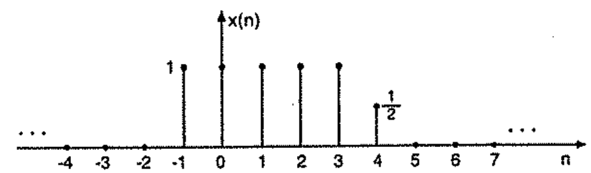
a) $x(4-n)$

b) $x(2n+1)$

c) $x(n-1)\delta(n-3)$

d) $x(n)u(2-n)$

e) $x(n^2)$



Şekil 1.11

1.3 Aşağıdaki diziler $x(n) = A\cos(\omega n + \phi)$ biçimindeki bir sinüzoidal dizinin bir periyodunu göstermektedir. A, ω_0, ve ϕ değerlerini bulunuz.

a) $\{\, 0 \quad -\sqrt{2} \quad -2 \quad -\sqrt{2} \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{2}\}$

b) $\{2 \quad -2\}$

1.4 Aşağıdaki işaretlerin periyodik olup olmadıklarını gösteriniz. Eğer işaret periyodik ise temel periyodunu bulunuz.

a) $x(n) = e^{j(n/8-\pi)}$

b) $x(n) = \cos\frac{\pi n^2}{8}$

c) $x(n) = \cos\left(\frac{n}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

d) $x(n) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(n-3m) - \delta(n-1-3m)]$

1.5 $x(n)$ sistem girişi ve $y(n)$ sistem çıkışı olduğuna göre, aşağıdaki sistemlerin,

(i) Nedensel
(ii) Kararlı
(iii) Doğrusal
(iv) Zamanla-değişmeyen

olup olmadıklarını belirleyiniz. Cevabınızın gerekçesini açıklayınız.

a) $y(n) = ax(n) + b$
b) $y(n) = g(n)x(n)$
c) $y(n) = nx(n)$
d) $y(n) = x(n)x(n-1)$

1.6 Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemi gözönüne alalım.

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)}\right)$$

Giriş $x(n) = \alpha u(n)$ (α pozitif bir sayı) ve başlangıç koşulu olarak $y(-1) = 1$ seçersek, çıkış $y(n)$'nin $\sqrt{\alpha}$'ya yakınsadığını gösteriniz. Bu sistem doğrusal mıdır? Zamanla değişmez midir? Cevaplarınızı açıklayınız.

MATLAB UYGULAMALARI

M1.1 Birim impuls dizisi $\delta(n)$ ve birim basamak dizisi $u(n)$ sıkça karşılaşacağımız iki temel ayrık-zamanlı dizidir. L uzunluğunda bir birim impuls dizisini MATLAB[1] kullanarak şu şekilde oluşturabiliriz.

```
d=[1 zeros(1,L-1)];
```

Benzer şekilde L uzunluğunda bir birim basamak dizisini yaratmak için

```
u=[ones(1,L)];
```

yazarız. Bu diziyi n_0 kadar ötelemek için

```
d_gecikme=[zeros(1,n0) ones(1,L)];
```

yazmamız yeterlidir. Aşağıdaki programla bir birim impuls dizisi oluşturup çizdirebilirsiniz.

```
% Birim impuls dizisi oluşturma
clear all; close all;
```

[1] MATLAB, Mathworks Inc.'in tescilli markasıdır, www.mathworks.com.


```
% -20'den 20'ye bir vektör oluştur
n=-20:20;
% Birim impuls dizisini oluştur
d=[zeros(1,20) 1 zeros(1,20)];
% Birim impuls dizisini çizdir
stem(n,d);
xlabel('zaman indisi n');
ylabel('genlik');
title('Birim impuls dizisi');
axis([-20 20 0 1.2])
```

Aşağıdaki dizileri oluşturunuz ve çizdiriniz. n-ekseni belirtilen aralığı kapsayacak şekilde olmalı ve doğru numaralandırılmalıdır.

$$x_1(n) = 0.75\delta(n-7) \qquad 1 \leqslant n \leqslant 15$$
$$x_1(n) = 1.4\delta(n+150) \qquad -200 \leqslant n \leqslant -100$$

M1.2 Aşağıdaki MATLAB programı periyodik bir işaret oluşturacaktır.

```
x=[0 1 0 1 0 0].'*ones(1,15);
x=x(:);
length(x)
```

x'i çizdirin ve bu işaret için kapalı form bir matematiksel formül bulmaya çalışın.

M1.3 MATLAB kullanarak aşağıda verilen dizileri oluşturunuz ve çizdiriniz (`stem` fonksiyonunu kullanınız).

a) $x_1(n) = (0.5)^n \sin(0.4\pi n + \pi/4), \quad 0 \leqslant n \leqslant 25.$
b) $x_2(n) = \sum_{m=0}^{10} m(\delta(n-m) - \delta(n-m-1)), \quad 0 \leqslant n \leqslant 20.$
c) $\tilde{x}_3(n) = \{\ldots, 0, 1, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, \ldots\}_{\text{PERİYODİK}}$. Bu periyodik işareti 4 tam periyot için çizdiriniz.

M1.4 Basit bir *sayısal türev alıcı* sistem aşağıdaki giriş-çıkış ilişkisiyle verilebilir.

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Bu sistem, giriş dizisi için birinci dereceden farkı hesaplamaktadır. Sistem doğrusal mıdır? Zamanla değişmez midir? Kararlı mıdır? Bu algoritmayı aşağıda verilen giriş dizileri için gerçekleyiniz ve çıkış dizilerini çizdiriniz. Türev alma işeminin başarısını inceleyiniz.

a) $x(n) = 10[u(n) - u(n-20)]$, bir dikdörtgen işaret
b) $x(n) = 2n[u(n) - u(n-5)] + (10-n)[u(n-5) - u(n-10)]$, bir üçgen işaret
c) $x(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)[u(n) - u(n-54)]$, sinüzoidal bir işaret

M1.5 Sayısal işaret işlemenin tipik bir uygulama alanı toplamsal gürültüyle bozulmuş bir işaretin gürültüden arındırılmasıdır. $x(n)$ gürültü eklenerek bozulan bilgi işareti, $g(n)$ bozucu gürültü işareti, $b(n) = x(n)+g(n)$ ise bozulmuş işareti belirtsin. Amacımız gürültü bileşenini mümkün olduğunca yok edip, $x(n)$ için bir yaklaşık kestirim olan $y(n)$ işaretini oluşturmaktadır. Bu amaçla kullanılabilecek basit bir yöntem, her n anı için yakın $b(m)$ değerlerinin bir ortalamasını alıp gürültü bileşenini yok etmeye çalışmaktır. Buna örnek olacak üç-noktalı bir kayan-ortalama algoritması şu şekilde verilir.

$$y(n) = \frac{1}{3}\Big(b(n-1) + b(n) + b(n+1)\Big)$$

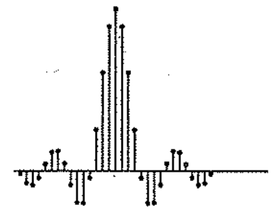
Aşağıda verilen kod bu algoritmayı gerçeklemektedir.

```
% Kayan Ortalama ile Gürültü Giderme
clear all; close all;
R = 101;
g = (rand(R,1)-0.5); % gürültü işaretini oluşturalım
m = 0:R-1;
x = 2*sin(0.2*m); % bilgi işaretini oluşturalım
b = x + g'; % toplamsal gürültüyle bozulmuş bilgi işareti
subplot(2,1,1);
plot(m,g','r-',m,x,'g-',m,b,'b-');
xlabel('zaman  n');ylabel('İşaret Genliği');
legend('g[n] ','x[n] ','b[n] ');
y(1)=(g(1)+g(2))/3;
for n=2:1:100
y(n)=(b(n-1)+b(n)+b(n+1))/3;
end
y(101)=(g(100)+g(101))/3;
subplot(2,1,2);
plot(m,y,'r-',m,x,'g-');
legend( 'y[n] ','x[n] ');
xlabel('zaman  n');ylabel('İşaret Genliği');
```

a) Bu programı çalıştırarak çıkışları gözleyiniz.

b) Kayan ortalama işlemi öncesi ve sonrasında istenmeyen gürültü bileşeni enerjisini hesaplayınız. Algoritma gürültüyü gidermede başarılı oldu mu?

c) Burada kullanılan `rand` komutu 0-1 aralığında düzgün dağılımlı değerlerden oluşan rastgele işaret üretmektedir. Bu üretilen dizi gürültüyü modellemekte kullanılmaktadır. Toplamsal gürültünün enerjisini artırmak istersek nasıl bir işlem yapmamız gerekir?



Bölüm 2
AYRIK-ZAMANLI DOĞRUSAL ZAMANLA-DEĞİŞMEYEN SİSTEMLER

Pek çok fiziksel sistem doğrusal zamanla-değişmeyen (Linear Time Invariant - DZD) sistem biçiminde modellenebilir. Bu nedenle, ayrık-zamanlı DZD sistemler sayısal işaret işlemede çok önemli bir rol oynamaktadır. Bu bölümde, ayrık-zamanlı bir sistemin giriş ve çıkış ilişkisini belirleyen birbirinden farklı fakat eşdeğer yöntemler tanıtılacaktır. Sistemlerin davranışları birim impuls cevabı, fark denklemleri ve durum denklemleriyle karakterize edilecektir [1-4]. Her modelin belirli işlemler ve hesaplamalar için kendine özgü avantajları vardır.

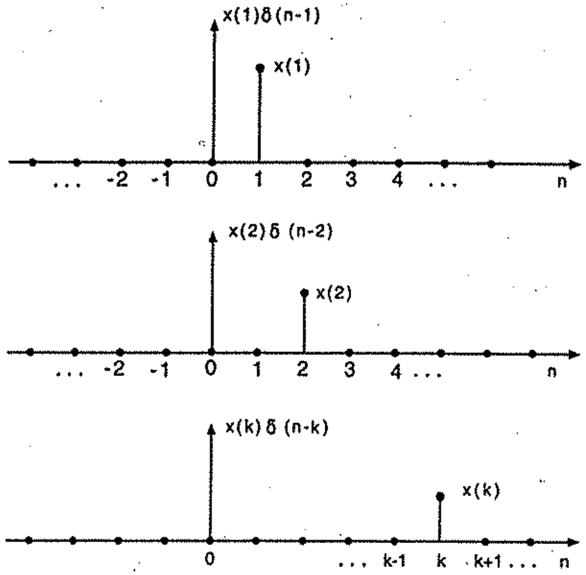
2.1 DZD SİSTEMLERİN BİRİM İMPULS CEVABI YÖNTEMİYLE MODELLENMESİ

Eğer giriş birim impuls dizisi $\delta(n)$ ise, buna karşı düşen sistem çıkışı impuls cevabı olarak adlandırılır ve $h(n)$ ile gösterilir. Ayrık-zamanlı DZD sistemin giriş ve çıkış bağıntısı birim impuls cevabı yardımıyla şöyle belirlenir. Bölüm 1'de belirttiğimiz gibi herhangi bir $x(n)$ giriş dizisi sonsuz sayıda ötelenmiş ve sabit katsayısı çarpılmış impulsların toplamı şeklinde yazılabilir.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{2.1}$$

Şekil 2.1'de gösterildiği gibi k. impuls $\delta(n-k)$'nın katsayısı, $x(n)$ dizisinin k. elemanı $x(k)$'dır.

DZD sistemin ötelenmiş birim impuls girişi $\delta(n-k)$ için olan çıkış dizisinin $h(n-k)$ olduğu Şekil 2.2'de gösterilmiştir. Bu durum, sistemin zamanla

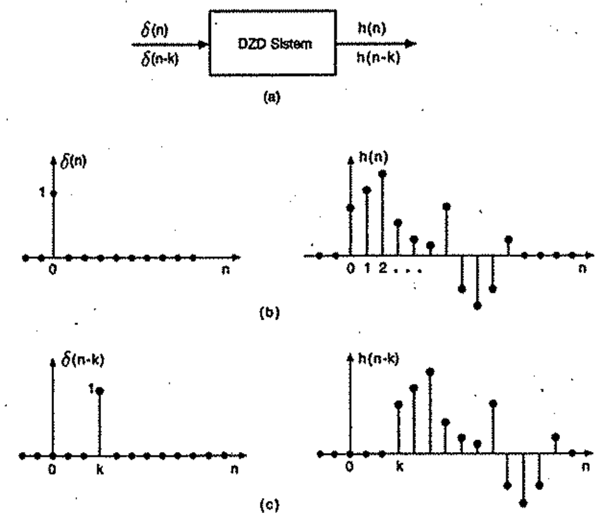


Şekil 2.1 İmpuls bileşenleri ile $x(n)$ dizisinin gösterilimi.

değişmeme özelliğinin bir sonucudur. Ayrıca, sistemin doğrusallık özelliğinin ve (2.1)'in kullanılmasıyla $x(n)$'nin cevabı $y(n)$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} y(n) = \mathcal{T}[x(n)] &= \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathcal{T}[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.2) bağıntısı ayrık-zamanlı DZD sistemin giriş ve çıkış ilişkisine ait konvolüsyon toplamıdır. Buna göre, impuls cevabı $h(n)$'nin sistemin giriş çıkış ilişkisini tamamen karakterize ettiğini görmekteyiz. Öyleyse, sistemin kararlılığı ve nedenselliğine ilişkin gerekli ve yeterli koşulların da birim impuls cevabından bulunabilmesi gerekir. Bu konuları incelemeden önce, konvolüsyon toplamını ve özelliklerini ele alalım.



Şekil 2.2 Zamanla değişmeme kriteri: a) DZD sistemin ötelenmiş birim impuls cevabı; b) $\delta(n)$ için DZD sistemin cevabı; c) $\delta(n-k)$ için aynı sistemin cevabı.

2.1.1 Konvolüsyon Toplamı ve Özellikleri

$x(n)$ sistemin girişi ve $h(n)$ impuls cevabı olduğuna göre, çıkış dizisi $y(n)$ (2.2) bağıntısı ile hesaplanır. $y(n)$ dizisine "$x(n)$ ve $h(n)$'nin konvolüsyonu" denir ve

$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{2.3}$$

notasyonu ile gösterilir. Konvolüsyon toplamı için aşağıdaki ilişkilerin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Değişme Özelliği

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \tag{2.4}$$

bağıntısı ile gösterilen bu özellik (2.2) denkleminde değişken dönüşümüyle gösterilebilir. O halde, çıkış dizisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{2.5}$$

Dağılma Özelliği

$$x(n) * \{h_1(n) + h_2(n)\} = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \tag{2.6}$$

Konvolüsyon toplamı tanımıyla kolayca gösterilebilen (2.6)'daki dağılma özelliği, paralel bağlı DZD iki sistemin birim impuls cevabının bulunmasında yararlıdır. Şekil 2.3'te gösterildiği gibi, paralel iki sistemde toplam çıkış, sistemlerin çıkışlarının toplamından oluşmaktadır. Öyleyse,

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) + y_2(n) \\ &= \{x(n) * h_1(n)\} + \{x(n) * h_2(n)\} \\ &= x(n) * \{h_1(n) + h_2(n)\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

ve sistemlerin paralel bağlanmasından oluşan eşdeğer tek bir sistemin birim impuls cevabı aşağıdaki şekilde verilecektir.

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) \tag{2.8}$$

Birleşme Özelliği

$$x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\} = \{x(n) * h_1(n)\} * h_2(n) \tag{2.9}$$

Konvolüsyonun tanımı ve toplam sıralarının değiştirilmesiyle gösterilebilen bu özellik, seri bağlı DZD sistemlerin birim impuls cevabının bulunmasında kullanılır. Eğer birinci sistemin çıkışı ikincinin girişi ise bu iki sisteme seri yada kaskat bağlı denir. Şekil 2.4'te gösterilen seri bağlı sistemler için

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n) \tag{2.10}$$

$$y(n) = y_1(n) * h_2(n) \tag{2.11}$$

yazılabilir. Buna göre, (2.10) ve (2.11) bağıntılarından ve dağılma özelliğinden

$$\begin{aligned} y(n) &= \{x(n) * h_1(n)\} * h_2(n) \\ &= x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

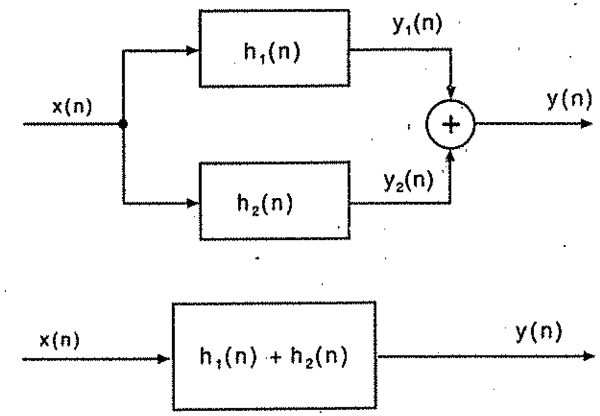
bulunur. O halde, seri bağlı sisteme eşdeğer tek bir sistemin birim impuls cevabı aşağıdaki şekilde bulunacaktır.

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \tag{2.13}$$

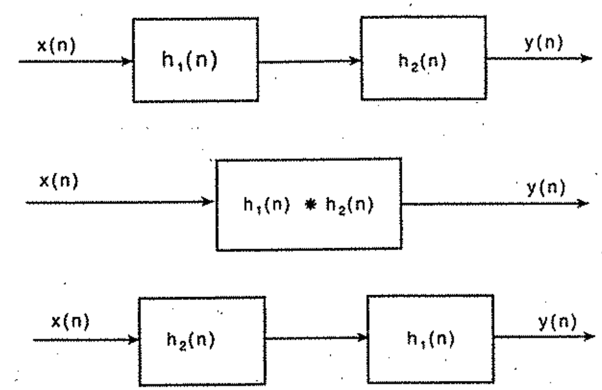
Değişim özelliği nedeniyle,

$$h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n) \tag{2.14}$$

olduğundan seri bağlı sistemlerin sırasının değiştirilmesinin çıkış dizisi $y(n)$'yi değiştirmediği görülmektedir.



Şekil 2.3 Paralel bağlantılı iki DZD sitemin eşdeğeri.

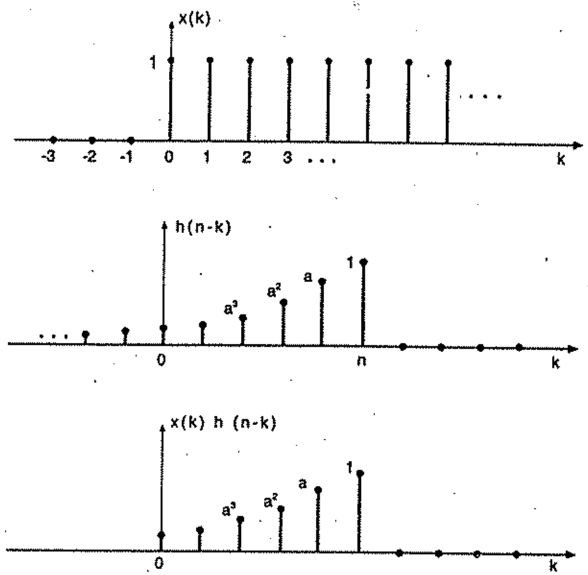


Şekil 2.4 Seri bağlantılı iki DZD sitemin eşdeğeri.

Örnek 2.1 Konvolüsyon toplamına örnek olarak, DZD bir sistemin çıkışını hesaplayalım. Şekil 2.5'te gösterildiği gibi giriş işareti birim basamak dizisi ve sistemin birim impuls cevabı sağ taraflı üstel bir dizidir. Yani,

$$\begin{aligned} x(n) &= u(n) \\ h(n) &= a^n u(n) \end{aligned}$$

Sistem çıkışı $y(n)$ konvolüsyon toplamı yardımıyla bulunabilir.

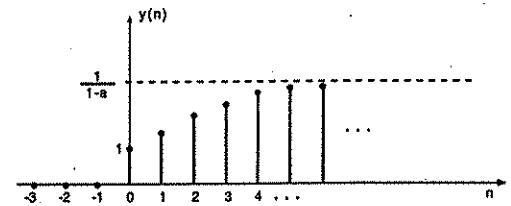


Şekil 2.5 Örnek 2.1'deki konvolüsyon toplamının grafiksel gösterilimi.

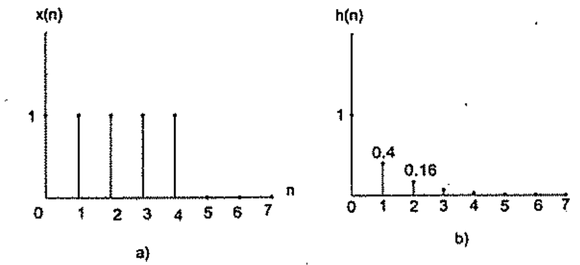
$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)a^{n-k}u(n-k) = \left\{\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\right\}u(n) \\
&= a^n\left\{\sum_{k=0}^{n} a^{-k}\right\}u(n) = \left\{\tfrac{1-a^{n+1}}{1-a}\right\}u(n) \\
&= \begin{cases} 0 & n < 0 \text{ için,} \\ 1 + a + a^2 + \ldots + a^n & n \geqslant 0 \text{ için} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$0 < a < 1$ için $y(n)$ çıkışı Şekil 2.6'da görülebilir.

Örnek 2.2 $x(n) = u(n) - u(n-5)$ olarak verilen dikdörtgen impuls şeklinde bir dizi birim impuls cevabı $h(n) = 0.4^n u(n)$ olarak verilen DZD bir sisteme giriş olarak uygulanmaktadır. Çıkış dizisini bulunuz.



Şekil 2.6 Örnek 2.1'de $0 < a < 1$ için sistem çıkışı, $y(n) = u(n) * (a^n u(n))$.



Şekil 2.7 Örnek 2.2 için: a) sistem girişi; b) sistem impuls cevabı.

Çözüm. Giriş dizisi $x(n)$ ve birim impuls cevabı $h(n)$ Şekil 2.7'de gösterilmektedir. (2.2) kullanılarak

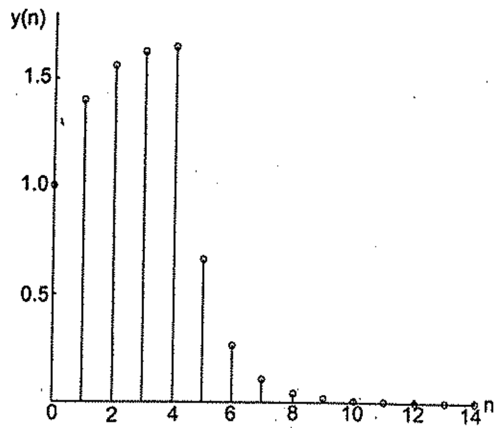
$$
y(n) = \sum_{k=0}^{4}(1)(0.4)^{(n-k)}u(n-k) = (0.4)^n \sum_{k=0}^{4}(0.4)^{-k}u(n-k) \tag{2.15}
$$

(2.15)'te verilen toplam, $u(n-k)$ terimi dışında bir geometrik seri toplamına benzemektedir. $u(n-k)$'nın değerlendirilmesi gereken üç farklı bölge vardır.

(i) $n < 0$: Bu durumda $0 \leqslant k \leqslant 4$ için $u(n-k) = 0$ olmaktadır. Bu şekilde (2.15)'ten $y(n) = 0$ bulunur. Bu aralık için $x(k)$ ve $h(n-k)$'nin sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler örtüşmemektedir.

(ii) $0 \leqslant n < 4$: Bu durumda $0 \leqslant k \leqslant n$ için $u(n-k) = 1$ olmaktadır. (2.15)'ten,

$$
\begin{aligned}
y(n) &= (0.4)^n \sum_{k=0}^{n}(0.4)^{-k} = (0.4)^n \sum_{k=0}^{n}\left[(0.4)^{-1}\right]^k \\
&= (0.4)^n \frac{1-(0.4)^{-(n+1)}}{1-1/0.4} = 10\left[1-(0.4)^{n+1}\right]
\end{aligned}
$$



Şekil 2.8 Örnek 2.2 için sistem çıkışı.

$x(k)$ ve $h(n-k)$'nin sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler kısmi olarak örtüşmektedirler.

(iii) $n \geqslant 5$: Bu durumda $0 \leqslant k \leqslant 5$ için $u(n-k) = 1$ olmaktadır. Böylece

$$\begin{aligned} y(n) &= (0.4)^n \sum_{k=0}^{4} (0.4)^{-k} = (0.4)^n \frac{1-(0.4)^{(-5)}}{1-1/0.4} \\ &= 10(0.4)^{n-4}\left[1-(0.4)^5\right] \end{aligned}$$

$x(k)$ ve $h(n-k)$'nın sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler sürekli olarak örtüşmektedirler.

Yukarıda gösterildiği üzere bulunan toplam çıkış Şekil 2.8'de çizdirilmiştir. □

2.1.2 Birim İmpuls Cevabı ve Kararlılık

Tanım uyarınca her sınırlı giriş işareti yine sınırlı bir çıkış sağlıyorsa, DZD sistem kararlıdır. Buna göre sonlu bir M için

$$|x(n)| < M, \quad \text{tüm } n \text{ için} \tag{2.16}$$

olan bir giriş dizisi birim impuls cevabı $h(n)$ olarak verilen sisteme uygulanırsa, çıkışın genliği

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \tag{2.17}$$

olarak bulunur. Sayıların toplamının mutlak değeri tek tek mutlak değerleri toplamından büyük olamaz. O halde,

$$|y(n)| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot |x(n-k)| \tag{2.18}$$

ve giriş dizisi sonlu olduğundan

$$|x(n-k)| < M \quad \text{tüm } k \text{ ve } n \text{ için} \tag{2.19}$$

olur. Bunu (2.18) bağıntısında yerine koyarsak,

$$|y(n)| \leqslant M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \quad \text{tüm } n \text{ için} \tag{2.20}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda $h(n)$ mutlak değerleri toplamı sonlu, yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \tag{2.21}$$

olursa, sistem çıkışı $y(n)$'nin genliği de sonlu olacaktır. (2.20) ve (2.21) bağıntılarından

$$|y(n)| < \infty \quad \text{tüm } n \text{ için} \tag{2.22}$$

olur. Demek ki, bir DZD sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart olarak (2.21)'deki koşulun sağlanması gerekmektedir. Bu şartı sağlamayan DZD sistemler kararsızdır. Bu şartın kararlılık testinde uygulanabilmesi için ilk önce sistemin DZD olduğunun gösterilmesi ve impuls cevabının bulunması gerektiğini unutmayınız.

Örnek 2.3 DZD sistemin impuls cevabı aşağıdaki şekilde verilsin.

$$h(n) = a^n u(n) \tag{2.23}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k \tag{2.24}$$

elde edilir. Eğer $|a| < 1$ ise, (2.24) toplamı yakınsar. Buradan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| = \frac{1}{1-|a|} \tag{2.25}$$

olarak bulunur ve sistem kararlıdır. Ancak, $|a| \geqslant 1$ olursa bu toplam yakınsamaz ve sistem kararsız olacaktır.

Örnek 2.4 Sadece zamanda öteleme sağlayan bir ayrık-zamanlı sistemi ele alalım.

$$h(n) = \delta(n - n_0) \tag{2.26}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n-n_0)| = 1 \tag{2.27}$$

Birim impuls cevabı (2.27) ile verilen DZD sistem kararlıdır.

Örnek 2.5 Bu örnekte, birim impuls cevabı birim basamak dizisi olan DZD bir sistemi ele alalım.

$$h(n) = u(n) \tag{2.28}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \to \infty \tag{2.29}$$

Sözkonusu sistem kararsızdır.

2.1.3 Birim İmpuls Cevabı ve Nedensellik

Daha önce belirtildiği gibi, nedensel bir sistemin çıkışı o andaki ve geçmişteki giriş işaretlerine bağımlıdır. (2.2) konvolüsyon toplamı kullanılırsa, DZD bir sistemin birim impuls cevabı ile nedensellik arasındaki ilişki kolayca görülebilir. Burada nedenselliğin geçerli olabilmesi için, $y(n)$ çıkış işaretinin hesaplanmasında $x(k)$ $k > n$ terimlerinin yer almaması gerekmektedir. Bu koşul aşağıda verilen özelliğe indirgenebilir.

$$h(n) = 0 \quad \forall n < 0 \tag{2.30}$$

(2.30) koşulu altında, konvolüsyon toplamı aşağıda verilen şekilde basitleşecektir.

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell)x(n-\ell) \tag{2.31}$$

Açıklama 2.1 Fiziksel olarak gerçekleştirilen sayısal süzgeçlerin daima nedensel olmasına karşılık, nedensel olmayan sistemler de tasarlanabilir. Bellekte saklanan sayısal işaret bilgisayar yazılımı yardımıyla nedensel olmayan bir sistemin gerçekleştirilmesinde kullanılabilir. Sayısal süzgeçlerle ilgili bölümde bu konu ayrıca tartışılacaktır.

2.1.4 Sonlu ve Sonsuz Uzunluklu İmpuls Cevaplı Sistemler

DZD sistemler birim impuls cevaplarının sonlu yada sonsuz uzunluklu olmasına göre sınıflandırılabilirler. Sonlu uzunluklu impuls cevabına sahip olan sistemler sonlu impuls cevaplı (Finite Impulse Response, FIR), sonsuz uzunluklu impuls cevabına sahip olan sistemler sonsuz impuls cevaplı (Infinite Impulse Response, IIR) sistemler olarak adlandırılır. Bir FIR sistem, belirli sonlu bir zaman aralığı dışında sıfır olan bir impuls cevabına sahiptir ve giriş-çıkış ilişkisini belirten konvolüsyon toplamı aşağıdaki şekilde verilir.

$$h(n) = 0, \quad n < -N_2 \text{ ve } n > N_1$$

$$y(n) = \sum_{k=-N_2}^{N_1} h(k)x(n-k)$$

Eğer sistemin nedensel olduğu bilgisi de verilirse,

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \text{ ve } n > N_1 \tag{2.32}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N_1} h(k)x(n-k) \tag{2.33}$$

IIR DZD sistem için ise impuls cevabı sonsuz uzunluklu olacaktır ve giriş çıkış ilişkisi (2.2)'de verilen genel sonsuz uzunluklu konvolüsyon toplamı ile ifade edilecektir.

2.2 FARK DENKLEMLERİYLE BELİRLENEN SİSTEMLER

Bir DZD sistemin giriş-çıkış ilişkisinin birim impuls cevabı $h(n)$ ile tamamen belirlendiğini gördük. Böylece konvolüsyon toplamı birim impuls cevabı bilinen bir sistemin gerçekleştirilmesi için bir yöntem olacaktır. (2.32)'den görüldüğü gibi, FIR sistemler için bu çeşit bir gerçekleştirme sınırlı sayıda toplama, çarpma ve hafıza elemanları gerektirecektir. Böylece, FIR bir sistem doğrudan konvolüsyon toplamı ile gerçeklenebilir. Ancak sistem IIR ise, sistemin konvolüsyon toplamı kullanılarak gerçekleştirilmesi pratik olarak imkansızdır. Böyle bir gerçekleştirme sonsuz sayıda toplama, çarpma ve hafıza elemanları gerektirecektir. IIR sistemleri gerçekleştirmek için doğrudan konvolüsyon toplamını kullanmanın dışında pratik bir yöntem geliştirmek zorunlu olacaktır. Böyle bir gerçekleştirme yöntemi fark denklemleriyle ifade edilebilen ayrık-zamanlı sistemler için mümkündür. DZD sistemlerin bir alt sınıfı olan bu sistemlerin giriş-çıkış ilişkisi, sabit katsayılı bir fark denklemi ile ifade edilir.

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k) \tag{2.34}$$

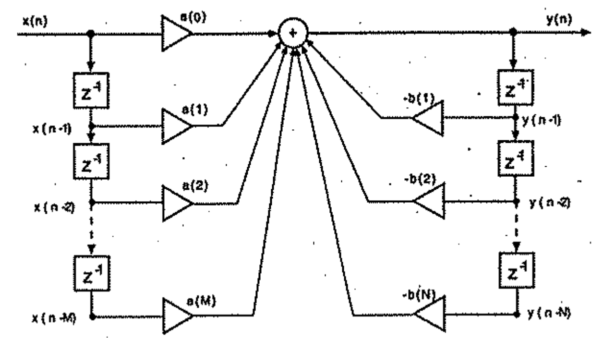
Burada, $x(n)$ ve $y(n)$ sistemin giriş ve çıkış dizilerini, a_k ve b_k ise sabit katsayıları belirtmektedir. maksimum(N, M) bu ayrık-zamanlı sistemin ve fark denkleminin derecesi olarak adlandırılmaktadır. Bu denklemi kullanarak çıkış dizisi $y(n)$ özyineli (recursive) bir şekilde hesaplanabilir. Bunun için sistemin nedensel olduğunu ve katsayıların $b_0 = 1$ olacak şekilde normalize edildiğini varsayalım. (2.34) yeniden yazılabilir.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k) \tag{2.35}$$

Böylece eğer $x(n)$ ve başlangıç koşulları $y(n_0-1), y(n_0-2), \ldots, y(n_0-N)$ biliniyorsa, her $n \geqslant n_0$ için çıkış $y(n)$ hesaplanabilir. (2.35)'deki fark denklemi Şekil 2.9'da gösterildiği gibi gerçekleştirilebilir. Burada toplama, çarpma ve z^{-1} ile gösterilen birim gecikme elemanları fark denklemiyle belirlenen sistemin gerçekleştirilmesinde kullanılmaktadır.

2.2.1 Sistem Cevabının Hesaplanması

Bu bölümdeki amacımız, $n \geqslant 0$ için belirli bir giriş işareti $x(n)$ ve bir dizi başlangıç koşulları verildiğinde, $n \geqslant 0$ için $y(n)$ çıkış dizisini bulmak olacaktır. Sabit katsayılı fark denklemlerinin çözümünün hesaplanmasında sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümüne benzer bir yöntem izleyeceğiz. (2.34) ile belirtilen ayrık-zamanlı sistemin çıkışı, birbirinden bağımsız olarak hesaplanıp toplam cevabı oluşturmak üzere bir araya getirilen iki çıkıştan oluşacaktır. Bu çıkışlardan biri sadece ilk koşullara, diğeri ise sadece giriş işaretine bağlı olacaktır. İlk koşullara bağlı olan cevap sistemin *doğal cevabı* olarak adlandırılacak ve y_d ile gösterilecektir. Giriş nedeniyle oluşan çıkış ise sistemin *zorlanmış cevabı* olarak adlandırılacak ve y_z olarak gösterilecektir. Doğal cevap sıfır giriş için sistemin çıkışı, zorlanmış cevap ise sıfır başlangıç koşulları için sistem çıkışı



Şekil 2.9 (2.35)'deki fark denkleminin gerçekleştirilmesi. Birim gecikme z-dönüşümünde karşılığı olan z^{-1} operatörü ile gösterilmiştir.

olacaktır. Sıfır başlangıç koşullarına sahip olan bir sistem, sistemin depolanmış herhangi bir enerjisi yada belleği olmadığı için durgun olarak nitelendirilir. Doğal cevap, sistemin sıfırdan farklı ilk koşullarla nitelenen bir depolanmış enerjiyi yada geçmişe yönelik bilgiyi nasıl kullandığını gösterir. Zorlanmış cevap ise durgun sistem için giriş işaretinin zorladığı çıkışı belirtir.

2.2.2 Doğal Cevap

$y_d(n)$, (2.34) denkleminin, $x(n) = 0$ için çözümüdür. Böylece $y_d(n)$ aşağıda verilen homojen fark denkleminin çözümü olmaktadır:

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = 0 \tag{2.36}$$

Doğal çözümü bulmak için bu çözümün λ^n biçiminde olduğu varsayılır. Bu biçimin (2.34) denkleminde yerine koyulmasıyla aşağıdaki koşul elde edilir:

$$\sum_{k=0}^{N} b_k \lambda^{n-k} = \lambda^{n-N}\left(b_0\lambda^N + b_1\lambda^{N-1} + \cdots b_{N-1}\lambda + b_N\right) = 0 \tag{2.37}$$

$\sum_{k=0}^{N} b_k \lambda^{n-k}$ polinomu ayrık-zamanlı sistemimizin karakteristik polinomu olarak adlandırılır. Bu polinomun köklerini $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ olarak adlandıralım. Eğer bu köklerin herbiri ayrı ise doğal çözüm şu şekilde oluşacaktır.

$$y_d(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_N\lambda_N^n \tag{2.38}$$

Buradaki $c_1, c_2, \ldots, c_N$ katsayıları başlangıç koşulları kullanılarak bulunacaktır. Doğal cevaptakı her terim, karşılık gelen kökün gerçel, sanal yada karmaşık değerli olmasına göre farklılık gösterecektir. Gerçel kökler gerçel üstel cavaplara, sanal kökler sinüzoidal cevaplara ve karmaşık değerli kökler üstel sönümlü sinüzoidal cevaplara neden olacaktır.

Eğer karakteristik denklem katlı köklere sahipse, doğal çözüm değişikliğe uğrayacaktır. λ_j kökü p katlı ise, doğal çözümde bu köke ilişkin p ayrı terim olacaktır. Bunlar $\lambda_j^n, n\lambda_j^n, \ldots, n^{p-1}\lambda_j^n$ fonksiyonlarıdır.

Örnek 2.6 Aşağıda fark denklemi verilen sistem için doğal çözümü ($y_d(n)$, $n \geqslant 0$) bulunuz. Başlangıç koşulları $y(-1) = 2$ ve $y(-2) = 3$ olarak verilmektedir.

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) \tag{2.39}$$

Çözüm. Doğal çözümü bulmak için $y_d(n) = \lambda^n$ olarak alıp, bu çözümü $x(n) = 0$ için fark denklemine yerleştiriyoruz.

$$\begin{aligned}\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} &= \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4)\\ &= \lambda^{n-2}(\lambda+1)(\lambda-4) = 0.\end{aligned}$$

Böylece karakteristik polinomun kökleri $\lambda = -1$ ve $\lambda = 4$ olur. Doğal çözüm aşağıdaki şekilde yazılır.

$$y_d(n) = c_1(-1)^n + c_2(4)^n \tag{2.40}$$

Burada c_1, c_2 katsayıları $y(-1), y(-2)$ ön koşullarını sağlayacak şekilde seçilir. (2.39) $n = 0$ ve $n = 1$ için değerlendirilerek aşağıdaki değerler elde edilir.

$$\begin{aligned}y(0) &= 3y(-1) + 4y(-2) = 6 + 12 = 18\\ y(1) &= 3y(0) + 4y(-1) = 54 + 8 = 62\end{aligned}$$

Öte yandan (2.40) kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}y(0) &= c_1 + c_2 = 18\\ y(1) &= -c_1 + 4c_2 = 62\end{aligned}$$

Buradan çözüm olarak $c_1 = 2$ ve $c_2 = 16$ bulunur. Bulunan katsayıları (2.40) denkleminde yerine koyarsak doğal çözüm

$$y_d(n) = 2(-1)^n + 16(4)^n, \quad n \geqslant 0$$

şeklinde oluşur. □

2.2.3 Zorlanmış Cevap

Şimdi (2.34) için zorlanmış cevabı bulmaya çalışalım. Zorlanmış çözüm sıfır ilk koşullar varsayarak verilen giriş işareti için bulunacak çözümdür. Zorlanmış cevapta iki bölümden oluşacaktır: doğal cevapla aynı biçimde bir bölüm, ve bir özel çözüm.

Özel çözüm ($y_ö(n)$) verilen giriş işareti için fark denkleminin herhangi bir çözümünü göstermektedir. Özel çözümün bulunmasında uygulanacak yöntem, özel çözümün giriş işaretiyle aynı genel biçimde olacağı varsayımıdır. Böylece, eğer $x(n)$ sabit ise $y_ö(n)$'de sabit, eğer $x(n)$ bir sinüzoid ise $y_ö(n)$'de aynı frekanslı bir sinüzoid olacaktır.

Eğer giriş işareti doğal cevapta yer alan terimlerle aynı biçime sahipse özel çözüm farklı bir yol izlenerek bulunur. Bunun için doğal çözümde yer alan terimlerden bağımsız bir özel çözüm bulmamız gerekir. Karakteristik denklemde katlı kökler olduğunda doğal çözümde yapılan değişikliğe benzer bir yol izlenir. Özel çözümün genel biçimi, n^m gibi bir fonksiyonla çarpılır. m doğal cevapta yer almayan bir terimi sağlayacak en küçük değer olarak seçilir.

Zorlanmış çözüm, özel çözüm ve doğal çözüm genel formunun toplanmasıyla oluşur. Doğal çözümdeki katsayılar bu kez zorlanmış çözümün sıfır ilk koşulları sağlayacağı şekilde seçilir.

Örnek 2.7 Örnek 2.6'da verilen sistem için zorlanmış çözümü ($y_z(n), n \geqslant 0$) belirleyiniz. Giriş $x(n) = 9u(n)$ olarak verilmektedir.

Çözüm. Zorlanmış çözüm $y_z(n) = y_d(n) + y_ö(n)$ biçiminde bulunacaktır. Doğal çözüm $y_d(n)$'nin genel formu, Örnek 2.6'da $y_d(n) = c_1(-1)^n + c_2(4)^n$ olarak bulunmuştu. Şimdi bir özel çözüm bulmaya çalışalım. Giriş dizisi sabit bir dizi olduğu için, özel çözümün de benzer şekilde sabit bir dizi olacağı varsayılır. K bir sabit olmak üzere $y_ö(n) = Ku(n)$ olarak alınıp sistem fark denklemine yerleştirilir. Elde edilen denklem aşağıda verilmektedir.

$$Ku(n) - 3Ku(n-1) - 4Ku(n-2) = 9u(n)$$

Bu denklemi herhangi bir $n \geqslant 2$ için değerlendirirsek K'yı bulabiliriz.

$$K - 7K = 9 \Rightarrow K = -1.5$$

Böylece $y_ö(n) = -1.5u(n)$ olarak bulunur. Zorlanmış çözüm ise

$$y_z(n) = c_1(-1)^n + c_2(4)^n - 1.5u(n), \quad n \geqslant 0 \tag{2.41}$$

olur. Burada c_1, c_2 katsayıları $y(-1), y(-2)$ için sıfır ilk koşulları sağlayacak şekilde seçilir. (2.39), $n = 0$ ve $n = 1$ için değerlendirilerek aşağıdaki değerler

elde edilir.

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2) + 9 = 0 + 0 + 9 = 9$$
$$y(1) = 3y(0) + 4y(-1) + 9 = 27 + 0 + 9 = 36$$

Öte yandan (2.41) kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$y(0) = c_1 + c_2 - 1.5 = 9$$
$$y(1) = -c_1 + 4c_2 - 1.5 = 36$$

Buradan çözüm olarak $c_1 = 0.9$ ve $c_2 = 9.6$ bulunur. Bulunan katsayıları (2.41) denkleminde yerine koyarsak zorlanmış çözüm

$$y_z(n) = 0.9(-1)^n + 9.6(4)^n - 1.5u(n), \quad n \geqslant 0$$

şeklinde oluşur. □

2.2.4 Toplam Cevap

Sistemin toplam cevabı, doğal cevap ve zorlanmış cevabın toplamı olarak bulunur.

Örnek 2.8 Aşağıda fark denklemi verilen sistem için toplam çözümü ($y(n)$, $n \geqslant 0$) bulunuz. Giriş birim basamak dizisi ve $y(-1)$ başlangıç koşuludur.

$$y(n) + b_1 y(n-1) = x(n), \quad |b_1| < 1 \tag{2.42}$$
$$x(n) = u(n) \tag{2.43}$$

Çözüm. Doğal çözümü bulmak için $y_d(n) = \lambda^n$ olarak alıp, bu çözümü $x(n) = 0$ için fark denklemine yerleştiriyoruz.

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda + b_1) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = -b_1$$

Böylece doğal çözüm $y_d(n) = c_1(-b_1)^n$ şeklinde bulunur. Sıfır giriş için c_1 katsayısını bulalım. $y_d(n)$'yi $x(n) = 0$ ve $n = 0$ için fark denklemine yerleştirirsek

$$y_d(0) + b_1 y(-1) = 0$$
$$\Rightarrow c_1 + b_1 y(-1) = 0$$
$$\Rightarrow c_1 = -b_1 y(-1)$$

elde ederiz. Böylece $y_d(n) = y(-1)(-b_1)^{n+1}$ olur.

Şimdi zorlanmış çözümü bulalım. Giriş dizisi sabit bir dizi olduğu için, özel çözümün de benzer şekilde sabit bir dizi olacağı varsayılır. K bir sabit olmak üzere $y(n) = Ku(n)$ olarak alınıp sistem fark denklemine yerleştirilir. Elde edilen denklem aşağıda verilmektedir.

$$Ku(n) + b_1 Ku(n-1) = u(n)$$

Bu denklemi herhangi bir $n \geqslant 1$ için değerlendirirsek K'yı bulabiliriz.

$$K + b_1 K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{1+b_1}$$

Böylece $y_ö(n) = \frac{1}{1+b_1}u(n)$ olarak bulunur. Zorlanmış çözüm ise

$$y_z(n) = c_2(-b_1)^n + \frac{1}{1+b_1}u(n)$$

olur. Burada c_2 katsayısı, sıfır ilk koşulu sağlayacak şekilde seçilir. Sıfır ilk koşul için $n = 0$'da fark denklemini yazarsak

$$y_z(0) + b_1 0 = x(0) \Rightarrow y_z(0) = 1$$

$y_z(0) = 1$ yerine koyarsak c_2'yi elde ederiz.

$$y_z(0) = c_2 + \frac{1}{1+b_1} = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{b_1}{1+b_1}$$

Böylece zorlanmış cevabı

$$y_z(n) = \frac{b_1}{1+b_1}(-b_1)^n + \frac{1}{1+b_1}u(n) = \frac{1-(-b_1)^{n+1}}{1+b_1}$$

olarak buluruz. Böylece toplam çözüm, doğal çözüm ve zorlanmış çözümün toplamı

$$\begin{aligned} y(n) &= y_d(n) + y_z(n) \\ &= (-b_1)^{n+1}y(-1) + \frac{1-(-b_1)^{n+1}}{1+b_1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

2.2.5 Birim İmpuls Cevabının Hesaplanması

Fark denklemi ile belirtilen bir ayrık-zamanlı sistemin birim impuls cevabı, sistemin girişine $x(n) = \delta(n)$ girişi verilerek elde edilen zorlanmış cevapdır. Birim impuls giriş işareti için $x(n) = 0, n > 0$ olacağından, özel çözüm sıfır ($y_ö(n) = 0$) olacaktır. Böylece, birim impuls cevabı sadece $y_d(n)$ doğal çözümü ve sıfır başlangıç koşulları kullanılarak bulunabilir.

Örnek 2.9 Aşağıda fark denklemi verilen sistem için birim impuls cevabını bulunuz.

$$y(n) + b_1 y(n-1) = x(n), \quad |b_1| < 1 \tag{2.44}$$

Çözüm. Bu sistem için doğal çözümü Örnek 2.8'da bulmuştuk.

$$h(n) = y_d(n) = c(-b_1)^n u(n)$$

Sistemin birim impuls cevabını bulmak için $h(-1) = 0$ seçeriz. Bu durumda $n = 0$ için fark denklemini yazarsak

$$h(0) + b_1 h(-1) = 1 \Rightarrow h(0) = 1$$

$n = 0$ için birim impuls cevabını yazarsak c'yi elde ederiz ve

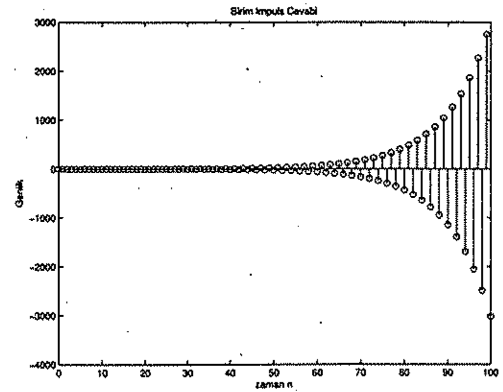
$$h(0) = c = 1 \Longrightarrow h(n) = (-b_1)^n u(n)$$

sonucuna ulaşırız. □

Örnek 2.10 Fark denklemi aşağıda verilen nedensel DZD bir sistemin birim impuls cevabını MATLAB ile çizdirelim.

$$y(n) + 0.5y(n-1) - 0.3y(n-2) + 0.4y(n-3) = 0.2x(n) + 0.6x(n-1) \tag{2.45}$$

```
% Birim İmpuls Cevabı Hesaplanması
    clear all; close all;
    N = input('birim impuls cevabının hesaplanacağı uzunluk= ');
    a =input('a_k katsayılarını girin a= ');
    b = input('b_k katsayılarını girin b= ');
    x = [1 zeros(1,N-1)];
    y = filter(a,b,x);
    k = 0:N-1; stem(k,y); xlabel('zaman n');
    ylabel('Genlik'); title('Birim Impuls Cevabi');
```

Şekil 2.10 Örnek 2.10'daki sayısal süzgecin impuls cevabının MATLAB ile çizdirilmiş şekli.

Giriş yaptığımız değerler

```
N=101; a=[0.2 0.6]; b=[1 0.5 -0.3 0.4];
```

Bu programla hesaplanan birim impuls cevabı Şekil 2.10'da çizilmiştir. Burada kullanılan `filter` komutu yerine kendimiz doğrudan fark denklemini yazarak da bu sistemi gerçekleyebilirdik. Ancak, `filter` komutu genel bir giriş işareti ve genel fark denklemi derecesi için bu işlemi kolaylaştırmaktadır. İmpuls cevabını genliği üstel olarak arttığı için mutlak değer toplanabilir olmadığını söyleyebiliriz. Böylece bu sistemin kararlı olmadığı anlaşılmaktadır.

2.3 DURUM DEĞİŞKENLERİ YÖNTEMİ

Fark denklemiyle modellenen nedensel süzgeçlerin iç değişkenlerinin durumunu belirlemek için durum değişkenleri yaklaşımı kullanılır. Sistemin tüm durum değişkenleri durum vektörü adı verilen bir vektörle gösterilir. Durum değişkenleri N. dereceden bir fark denklemini N adet birinci dereceden sisteme dönüştürerek elde edilir. Bu amaçla, aşağıdaki N. dereceden fark denklemini ele alalım.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k) \tag{2.46}$$

Bu süzgeci birbirine seri bağlanmış iki süzgeçe ayırabiliriz.

$$w(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{N} b_k w(n-k) \tag{2.47}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k w(n-k) \tag{2.48}$$

Gerçekten de (2.47)'deki ifade (2.48) denkleminde yerine konularak (2.46)'da gösterilen fark denklemi elde edilir. $q_1(n), q_2(n), \ldots, q_N(n)$ durum değişkenleri

$$\begin{aligned} q_1(n) &= w(n-N) \\ q_2(n) &= w(n-N+1) \\ &\vdots \\ q_N(n) &= w(n-1) \end{aligned} \tag{2.49}$$

olarak tanımlanır. (2.47) ve (2.49) denklemlerinden durum değişkenleri arasındaki ilişki yazılabilir.

$$\begin{aligned} q_1(n+1) &= w(n-N+1) = q_2(n) \\ q_2(n+1) &= w(n-N+2) = q_3(n) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ q_{N-1}(n+1) &= w(n-1) = q_N(n) \\ q_N(n+1) = w(n) &= x(n) - b_1 w(n-1) - b_2 w(n-2) - \ldots - b_N w(n-N) \\ &= x(n) - b_1 q_N(n) - b_2 q_{N-1}(n) - \ldots - b_N q_1(n) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Bu denklemleri matris formunda gösterebiliriz.

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \\ \vdots \\ q_{N-1}(n+1) \\ q_N(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -b_N & -b_{N-1} & -b_{N-2} & \cdots & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_N(n) \\ q_{N-1}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \tag{2.51}$$

(2.47) kullanılarak $w(n)$ değişkeni (2.48)'de yok edilebilir.

$$\begin{aligned} y(n) &= a_0 \left[x(n) - \sum_{k=1}^{N} b_k w(n-k) \right] + \sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k) \\ &= a_0 x(n) + \sum_{k=1}^{N} [a_k - a_0 b_k] \cdot w(n-k) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Aşağıdaki katsayıları tanımlayalım.

$$\begin{aligned} c_1 &= a_N - a_0 b_N \\ c_2 &= a_{N-1} - a_0 b_{N-1} \\ &\vdots \\ c_N &= a_1 - a_0 b_1 \end{aligned} \tag{2.53}$$

(2.50) ve (2.53)'deki tanımları kullanarak, çıkış

$$y(n) = a_0 x(n) + c_1 q_1(n) + c_2 q_2(n) \ldots + c_N q_N(n) \tag{2.54}$$

veya

$$y(n) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_N(n) \end{bmatrix} + [a_0] x(n) \tag{2.55}$$

olarak yazılabilir. Girişine $x(n)$ işareti uygulanan doğrusal bir sistemin çıkışı $y(n)$ olduğuna göre, durum denklemleri (2.51) ve (2.55)'den aşağıdaki gibi yazılabilir.

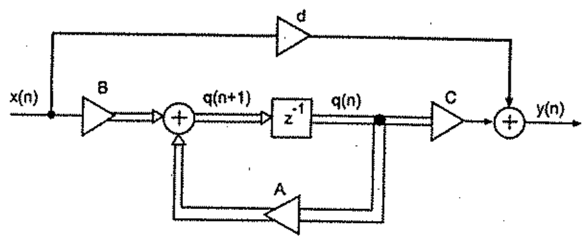
$$\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{q}(n) + \mathbf{B}x(n) \tag{2.56}$$

$$y(n) = \mathbf{C}\mathbf{q}(n) + dx(n) \tag{2.57}$$

A sistem matrisi, **B** kontrol vektörü, **C** gözlem vektörü ve d geçiş katsayısı olarak adlandırılır. **A** matrisi N. dereceden bir kare matrisidir. **B** ve **C** vektörleri N-boyutludur. $\mathbf{q}(n)$ ise durum değişkenlerini içeren durum vektörüdür.

$$\mathbf{q}(n) = \begin{bmatrix} q_1(n) & q_2(n) & \ldots & q_N(n) \end{bmatrix}^T \tag{2.58}$$

Şekil 2.11'de durum-değişkenlerine ilişkin blok diyagramı gösterilimi verilmiştir. Burada çift çizgiler vektör işaretleri göstermektedir.



Şekil 2.11 Durum değişkenleri yöntemiyle modellenen süzgecin blok diyagramı.

Örnek 2.11 Sayısal bir süzgeç aşağıdaki fark denklemiyle tanımlansın:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) - y(n-1) + 2y(n-2) \tag{2.59}$$

Süzgeç durum değişkenleri yardımıyla şöyle gösterilir. (2.51) denkleminden,

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \tag{2.60}$$

elde edilir. (2.53)'den

$$c_1 = a_2 - a_0 b_2 = 1 - 1(-2) = 3$$
$$c_2 = a_1 - a_0 b_1 = 2 - 1.1 = 1$$

bulunur. O halde,

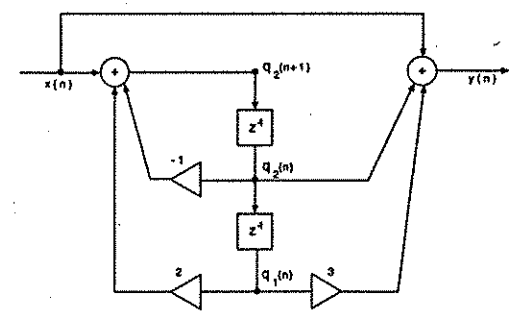
$$y(n) = [3 \;\; 1] \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + x(n) \tag{2.61}$$

(2.60) ve (2.61) birlikte sayısal süzgecin durum denklemlerini göstermektedir. Durum değişkenleri cinsinden blok-diyagram Şekil 2.12'de gösterilmiştir.

2.3.1 Durum Vektörünün Doğrusal Dönüşümü

Durum değişkenleri gösterilimi, verilen bir sistem için tek değildir. Aynı sayısal süzgeç için farklı yapıların varlığı kuvantalama hatalarının etkisinin azaltılması ve işlem karmaşıklığının azaltılması gibi konularda yararlıdır. $\mathbf{T}$ boyutu N olan ve tersi alınabilen bir kare matris olduğuna göre, $\mathbf{q}(n)$ durum vektörünün doğrusal dönüşümü

$$\mathbf{q}'(n) = \mathbf{T}\,\mathbf{q}(n) \tag{2.62}$$



Şekil 2.12 Örnek 2.11'deki sayısal süzgecin durum değişkenleri cinsinden blok diyagramı.

olur. (2.56) ve (2.62)'nin tersinden

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'(n+1) &= \mathbf{TAq}(n) + \mathbf{TB}x(n) \\ &= \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{q}'(n) + \mathbf{TB}x(n) \end{aligned} \tag{2.63}$$

ve

$$y(n) = \mathbf{CT}^{-1}\mathbf{q}'(n) + dx(n) \tag{2.64}$$

yazılır.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{-1}, \mathbf{B}' = \mathbf{TB}, \mathbf{C}' = \mathbf{CT}^{-1}, d' = d$$

olarak tanımlanırsa yeni durum denklemleri

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'(n+1) &= \mathbf{A}'\mathbf{q}'(n) + \mathbf{B}'x(n) \\ y(n) &= \mathbf{C}'\mathbf{q}'(n) + d'x(n) \end{aligned} \tag{2.65}$$

olur. Burada çıkış $y(n)$'nin değişmediği görülmektedir.

Örnek 2.12 Dönüşüm matrisi **T**'nin bir diyagonal matris olması durumunda **A'**, **B'** ve **C'** matrislerini bulalım.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

olduğuna göre ölçeklenmiş durum vektörü **q'**(n)

$$\mathbf{q}'(n) = \begin{bmatrix} t_{11}q_1(n) \\ t_{22}q_2(n) \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

olarak bulunur. Ayrıca ölçeklenmiş durum matrisleri de

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{t_{11}}{t_{22}}a_{12} \\ \frac{t_{22}}{t_{11}}a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}b_1 \\ t_{22}b_2 \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

$$\mathbf{C}' = [c_1\ c_2]\ \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{t_{11}} & \frac{c_2}{t_{22}} \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

olarak bulunur.

2.3.2 Zaman Domeni Analizi

Sayısal süzgeçlerin zaman domeni analizi durum denklemleri yardımıyla da gerçekleştirilir. İlk koşulların bilinmesi durumunda giriş ve çıkış ilişkisi **A**, **B**, **C** ve d cinsinden ifade edilebilir. $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(0) + \mathbf{B}x(0) \\ \mathbf{q}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(1) + \mathbf{B}x(1) \\ \mathbf{q}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(2) + \mathbf{B}x(2) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.71}$$

olduğu ve

$$\mathbf{q}(2) = \mathbf{A}^2\mathbf{q}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}x(0) + \mathbf{B}x(1)$$
$$\mathbf{q}(3) = \mathbf{A}^3\mathbf{q}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}x(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}x(1) + \mathbf{B}x(2)$$

yazılabileceği açıktır. Buradan genel bağıntı olarak

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{q}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{(n-1-k)}\mathbf{B}x(k) \tag{2.72}$$

bulunur. (2.72) bağıntısında $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ boyutları $(N \times N)$ olan birim matristir. O halde,

$$y(n) = \mathbf{C}\mathbf{q}(n) + dx(n)$$

$$y(n) = \mathbf{C}\mathbf{A}^n\mathbf{q}(0) + \mathbf{C}\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{(n-1-k)}\mathbf{B}x(k) + dx(n) \tag{2.73}$$

olur. $\mathbf{q}(0)$ başlangıç koşullarını taşıyan durum vektörü olup (2.49)'dan

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ \vdots \\ q_N(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(-N) \\ \vdots \\ w(0) \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

olarak bulunur. Giriş işaretinin $n < 0$ için $x(n) = 0$ ve $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$ olması durumunda (2.73)'den

$$y(n) = \mathbf{C}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{(n-1-k)}\mathbf{B}x(k) + dx(n) \tag{2.75}$$

bulunur. (2.75) başlangıç koşulları sıfır olan sayısal süzgecin çıkışını gösterir. Benzer şekilde, **A**, **B**, **C** ve d cinsinden sayısal süzgecin impuls cevabı (2.75)'den yazılabilir.

$$h(n) = \mathbf{C}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{(n-1-k)}\mathbf{B}\delta(k) + d\delta(n) \tag{2.76}$$

Böylece,

$$h(n) = \begin{cases} a(0), & n = 0 \text{ için} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B}, & n \neq 0 \text{ için} \end{cases} \tag{2.77}$$

REFERANSLAR

1. L. B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
2. T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
3. B. Porat, *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1997.
4. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing, A Computer Based Approach*, Mc Graw-Hill, 2001.

PROBLEMLER

2.1 M uzunluğunda bir dizi ile N uzunluğunda bir dizinin konvolüsyonunun $M+N-1$ uzunluğunda bir dizi olacağını gösteriniz.

2.2 $x(n) = u(n) - u(n-N)$ dizisi verilmiş olsun. $y(n) = x(n) * x(n)$ dizisini bulunuz ve en yüksek değeri N olan üçgen bir işaret olduğunu gösteriniz. $y(n)$ dizisinde, $N/4, N/2, N$ değerli örneklerin hangi noktalarda oluştuğunu bulunuz.

2.3 Aşağıdaki işaret çiftleri için $y(n) = x(n) * h(n)$ konvolüsyonunu hesaplayınız ve $y(n)$'yi çizdiriniz.

a) $x(n) = u(n) - u(n-6)$
$h(n) = 0.8^n u(n)$

b) $x(n) = u(n) - u(n-6)$
$h(n) = (-0.8)^n u(n)$

c) $x(n) = a^n u(n)$
$h(n) = b^n u(n), a \neq b$

2.4 $h_1(n)$ ve $h_2(n)$ birbirine seri bağlı iki doğrusal zamanla-değişmeyen sistemin impuls cevapları olsun. Aşağıdaki $x(n)$ girişi için sistemin $y(n)$ çıkışını bulunuz.
$h_1(n) = \sin(8n)$
$h_2(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$
ve $x(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$
(İpucu: Konvolüsyonun birleşme ve değişme özelliklerini kullanınız).

2.5 Aşağıdakiler DZD sistemlerin impuls cevaplarıdır. Sistemlerin kararlılığı için gerekli koşulları belirleyiniz.

a) $h(n) = a^n[u(n) - u(n-100)]$

b) $h(n) = a^n u(-n)$

c) $h(n) = a^{|n|}$

d) $h(n) = r^n \sin(n\omega_0 T)u(n)$

e) $h(n) = K(-1)^n u(n)$

2.6 Aşağıdakiler DZD sistemlerin impuls cevaplarıdır. Sistemlerin nedensel olup olmadığını belirleyiniz.

a) $h(n) = (-1/2)^n u(n) + (1.01)^n u(n-1)$

b) $h(n) = (0.99)^n u(-n)$

c) $h(n) = (4)^n u(2-n)$

d) $h(n) = n(1/2)^n u(n)$

e) $h(n) = (0.9)^n u(n+3)$

2.7 Aşağıdaki ifade ve denklemlerin doğru olup olmadıklarını belirleyiniz. Doğru ise ispat ediniz. Yanlış ise bir örnek ile gösteriniz.

a) $x(n) * \{h(n)g(n)\} = \{x(n) + h(n)\}g(n)$

b) $\alpha^n x(n) * \alpha^n h(n) = \alpha^n \{x(n) * h(n)\}$

c) Eğer $y(n) = x(n) * h(n)$ ise, $y(2n) = x(2n) * h(2n)$

2.8 Bir DZD sistemin impuls cevabı aşağıda verilmiştir.

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geqslant 0 \\ b^n, & n < 0 \end{cases}$$

Bu sistemi kararlı yapan a ve b değer aralıklarını bulunuz.

2.9 İlk koşulları sıfır olan ve aşağıdaki fark denklemi ile belirlenen DZD sistemi inceleyelim.
$y(n) - (5/2)y(n-1) + y(n-2) = 6x(n) - 7x(n-1) + 5x(n-2)$

a) $x(n) = u(n)$ birim basamak işaretine olan cevabını kapalı formda bulunuz.

b) $x(n) = (-1/2)^n$ girişine cevabını bulunuz.

c) $x(n) = (-1/2)^n u(n-2) + 3u(n-4)$ girişine cevabını bulunuz.

2.10 İmpuls cevabı $h(n) = e^{-0.1n}u(n)$ olan DZD sayısal süzgecin fark denklemi gösterilimini bulunuz.

2.11 Başlangıç koşulları sıfır olan bir sistem aşağıdaki matrisler ile karakterize edilsin.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-5}{16} & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{11}{8} & 2 \end{bmatrix} \quad d = [2]$$

a) Durum-uzayı yöntemini kullanarak $n = 0,1,2,3,4,5$ ve $n = 17$ için impuls cevabını bulunuz.

b) Bu sistemin fark-denklemini bulunuz.

c) (a)'da istenilenleri fark-denklemini kullanarak bulunuz.

2.12 Fibonacci dizisi $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$ şeklinde verilen dizidir. Bu dizi aşağıda durum gösterilimi verilen sistemin impuls cevabıdır.

$$\mathbf{q}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{q}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}x(n)$$
$$y(n) = [1 \ \ 1]\,\mathbf{q}(n) + x(n)$$

Bu sistemin impuls cevabını ve fark denklemini bulunuz.

MATLAB UYGULAMALARI

M2.1 MATLAB de konvolüsyon conv komutu kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Aşağıda verilen programda impuls cevabı verilen FIR bir sistem için çıkış dizisinin nasıl bulunacağı gösterilmektedir.

```
clear all; close all;
h = [4 3 2 1 -2 1 0 -2 0 2]; % impuls cevabı
x = [1 -2 3 -4 3 2 1];        % giriş dizisi
y = conv(h,x); n = 0:14; stem(n,y);
xlabel('zaman indisi n'); ylabel('Genlik');
title('Konvolüsyon kullanılarak çıkış'); grid;
```

Kendiniz konvolüsyon toplamı tanımını kullanarak konvolüsyon alan bir program yazınız. Yukarıda hesaplanan konvolüsyonu kendi programınızla hesaplayın ve conv ile bulunan sonuçla karşılaştırınız.

M2.2 Bir DZD sistem için fark denklemi aşağıda verilmektedir.

$$y(n) - 0.2y(n-1) + 0.3y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-4)$$

impz komutunu kullanarak bu sistemin impuls cevabını $0 \leqslant n \leqslant 200$ için bulunuz ve çizdiriniz. İmpuls cevabına bakarak sistemin kararlılığı hakkında ne söyleyebilirsiniz?

M2.3 Aşağıda verilen MATLAB fonksiyonu fark denklemi katsayılarından durum değişkenleri gösterilimine geçişi sağlamaktadır.

```
function [A,B,C,d] = fd2dd(b,a);
% Fonksiyon: [A,B,C,d] = fd2dd(b,a).
% Amaç: Fark denklemi gösterilimiyle gösterilen bir
% sistemin durum değişkenleri gösterilimini bulmak.
% Giriş: b, a: fark denklemi gösterilimi katsayıları.
% Çıkış: A, B, C, d: durum değişkenleri gösterilimi matrisleri.
a=a./b(1);%   fark denklemi katsayıları b(0)=1
b=b./b(1);%   olacak şekilde normalize ediliyor.
p = length(a)-1; q = length(b)-1;
N = max(p,q);
if (N > p),a =[a,zeros(1,N-p)]; end
if (N > q), b = [b,zeros(1,N-q)]; end
A =[[zeros(N-1,1), eye(N-1)]; -b(N+1:-1:2)];
B = [zeros(N-1,1);1];
C= a(N+1:-1:2) - a(1)*b(N+1:-1:2);
d = a(1);
```

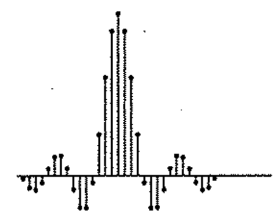

a) $a = [2\ 3\ 4]$, $b = [1\ -2\ -3\ -4]$ fark denklemi katsayılarıyla belirtilen sistemin impuls cevabı $h(n)$'i $0 \leqslant n \leqslant 100$ için filter komutunu kullanarak bulunuz ve çizdiriniz.

b) Bu sistemin durum değişkenleri gösterilimini bulunuz.

c) (2.56) durum denklemlerini ve (b)'de bulduğunuz durum değişkenlerini kullanarak bu sistemin durum denklemlerini yazınız. Durum denklemlerini kullanarak impuls cevabı $h(n)$'i $0 \leqslant n \leqslant 100$ için bulan bir MATLAB programı yazınız. (a)'da bulduğunuz sonuçla karşılaştırınız.

M2.4 Aşağıda verilen MATLAB fonksiyonu durum değişkenleri gösteriliminden fark denklemi katsayılarına geçişi sağlamaktadır. Bu programdan faydalanarak Problem 2.12'yi MATLAB kullanarak tekrarlayınız.

```
function [b,a] = dd2fd(A,B,C,d);
% Fonksiyon: [b,a] = dd2fd(A,B,C,d).
% Amaç: Durum değişkenleri gösterilimiyle gösterilen
% bir sistemin fark denklemi gösterilimini bulmak.
% Giriş: A, B, C, d: durum değişkenleri gösterilimi matrisleri.
% Çıkış: b, a: fark denklemi gösterilimi katsayıları.
b = poly(A); N = length(b)-1;
h = zeros(1,N+1); h(1) = d; tmp = B;
for i = 1:N, h(i+1) = C*tmp; tmp = A*tmp; end
a=b*toeplitz([h(1);zeros(N,1)],h);
```



Bölüm 3
z-DÖNÜŞÜMÜ

3.1 GİRİŞ

Ayrık-zamanlı sistemlerin analizi z-dönüşümünün kullanılmasıyla basitleşir. Gerçekten de fark-denklemleriyle gösterilen sistem modeli z-dönüşümü ile üzerinde kolaylıkla işlem yapılabilecek cebrik denklemlere dönüşür. Örneğin, ayrık-zamanlı sistemin giriş ve çıkış işaretleri arasındaki konvolüsyon bağıntısı, uygun z-dönüşümlerinin çarpımıyla gerçekleştirilir. Bu bölümde, bir dizinin z-dönüşümü gösterilimi ve dizi özellikleri ile z-dönüşümünün özellikleri arasındaki ilişki tartışılacaktır.

z-dönüşümünün incelenmesi sırasında kompleks değişkenler teorisinden birçok sonuç kullanılacaktır. Ancak, başvurulacak teoremlerin bazılarının matematiksel kanıtları verilmeyecektir.

3.2 z-DÖNÜŞÜMÜNÜN TANIMI

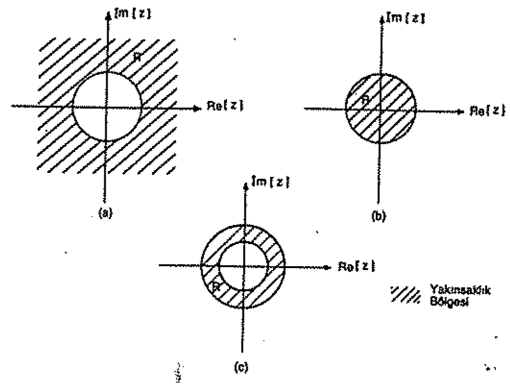
$x(n)$ dizisinin z-dönüşümü

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır [1]. Burada z karmaşık (kompleks) değerli bir değişkeni göstermektedir. (3.1)'deki z-dönüşümü sadece $X(z)$'nin yakınsak olduğu z değerleri için tanımlanır. $x(n)$ dizisinin z-dönüşümü bazen de basitleştirilmiş bir notasyonla

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] \tag{3.2}$$

$$x(n) \longleftrightarrow X(z) \tag{3.3}$$



Şekil 3.1 Mümkün olan yakınsaklık bölgesi formları: a) Sağ taraflı dizi; b) Sol taraflı dizi; c) İki taraflı dizi.

şeklinde gösterilebilir. $\mathcal{Z}[\cdot]$, z-dönüşümüne ilişkin dönüşüm kuralını gösteren matematiksel bir operatördür.

Yakınsaklık Bölgesi

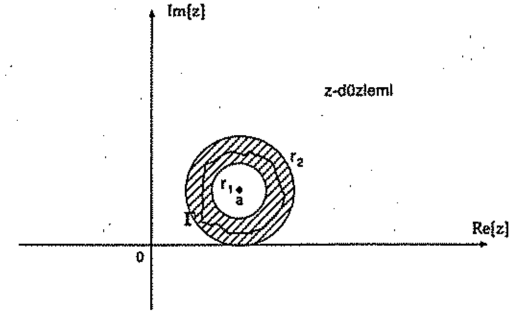
Tüm dizilerin z-dönüşümü yakınsak değildir. Diğer bir deyişle, tüm z değerleri için z-dönüşümü yakınsak olmaz. Verilen herhangi bir dizinin z-dönüşümünün yakınsak olduğu z değerlerinin karmaşık düzlemde oluşturduğu küme, o dönüşümün yakınsaklık bölgesi olarak adlandırılır.

Düzenli yakınsaklık, dizinin mutlak değerlerinin toplamının sonlu olmasını gerektirir. Yani,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty \tag{3.4}$$

eşitsizliğini sağlayan tüm z-değerleri yakınsaklık bölgesini oluşturur. (3.1)'de tanımlanan z-dönüşümü $X(z)$ bir Laurent serisidir. Kompleks değişkenler teorisinden bilindiği üzere, bir Laurent serisinin yakınsaklık bölgesi R, halka şeklindedir. Yani, halkanın iç ve dış yarıçapı r_1 ve r_2 olarak verilirse, $r_1 < |z| < r_2$ yakınsaklık bölgesi olan R halkasını gösterir. $x(n)$ dizisinin $+\infty$ ve $-\infty$'daki davranışına göre r_1 ve r_2 sınır değerleri belirlenir. Bu halka içerisinde $X(z)$, z'nin analitik bir fonksiyonudur. Bu nedenle, $X(z)$'nin kutupları ve tekil noktaları R bölgesi dışındadır.

Eğer $n < 0$ için $x(n) = 0$.ise, (3.1)'de z'nin sadece negatif üstel kuvvetleri bulunur. Bu durumda, $r_2 = \infty$ olur. Yakınsaklık bölgesi R, r_1 yarıçaplı bir



Şekil 3.2 $X(z)$'nin z-düzlemindeki analitiklik bölgesi.

çemberin dışı olur ve $|z| > r_1$ şeklinde gösterilir. Eğer $n > 0$ için $x(n) = 0$ ise, (3.1)'de z'nin sadece pozitif üstel kuvvetleri bulunur. Bu durumda, $r_1 = 0$ olup, yakınsaklık bölgesi $R \triangleq \{|z| < r_2\}$ bir çemberin içinde kalan bölgedir. Şekil 3.1'de karşılaşılabilecek yakınsaklık bölgeleri gösterilmiştir. Aşağıdaki bölümde bu konuya ilişkin örnekler verilecektir.

3.3 z-DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

z-dönüşümünün özelliklerini bir dizi teorem yardımıyla açıklayacağız. Önce Laurent teoremini ve sonuçlarını inceleyelim.

Teorem 3.1 (Laurent Teoremi). [2,3]

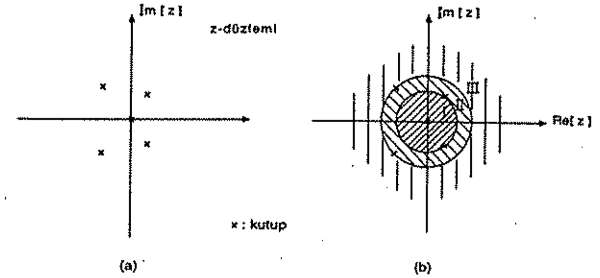
a) $X(z)$ Şekil 3.2'de gösterildiği gibi, yarıçapları r_1 ve r_2 ve merkezi z_0'da olan bir halka ($r_1 < |z - z_0| < r_2$) üzerinde analitik ve tek değerli bir fonksiyon olsun; bu durumda $X(z)$, z_0 noktası civarında Laurent serisiyle

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z - z_0)^{-n} \tag{3.5}$$

şeklinde gösterilebilir. (3.5)'deki $x(n)$ katsayıları ise

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z)(z - z_0)^{n-1} \tag{3.6}$$

kontur integrali yardımıyla elde edilir. Burada Γ, halka içinde saat yönünün tersi yönlü ve içteki çemberi çevreleyen kapalı bir konturu gösterir.



Şekil 3.3 Orijine göre üç Laurent serisi bulunan $X(z)$ fonksiyonu: a) $X(z)$ sıfır ve kutup diyagramı; b) Yakınsaklık halkaları.

b) $X(z)$'nin tekil olduğu noktalara varıncaya kadar sürekli olarak r_2'nin çapını artırırken r_1'in çapını küçülterek elde edilen açık halkanın içinde Laurent serisi yakınsaktır ve $X(z)$'yi temsil eder.

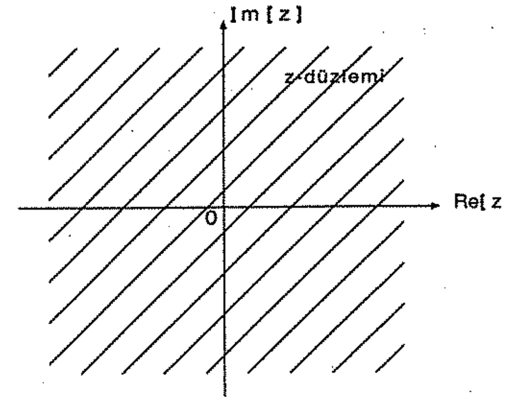
c) Yakınsaklık halkası içinde $X(z)$'nin Laurent serisi tektir. Bununla beraber, aynı merkezli farklı halkalarda $X(z)$'nin farklı Laurent serileri olabilir.

(3.1) ve (3.5)'deki bağıntıların karşılaştırılmasından (3.1)'in sağ tarafının, z-düzleminin orijini etrafında ($z_0 = 0$) $X(z)$ için bir Laurent serisi açılımı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Laurent Teoremi z-dönüşümlerine uygulanabilir.

İşaret işlemede sadece, tekil noktaları sonlu z-düzleminde kutuplar olan z-dönüşümleri ele alınacaktır. Teorem3.1(c)'ye göre bu türden fonksiyonların orijin etrafında birden fazla Laurent serisi bulunabilir. Örneğin, Şekil 3.3(a) daki sıfır ve kutup grafiğinden ilgili $X(z)$ fonksiyonunun orijin etrafında üç Laurent serisi olduğu görülür. Herbir halka Şekil 3.3(b) de belirtilmiştir. Kolaylık açısından, r_1 orijine göre en dıştaki kutuptan geçecek ve $r_2 \to \infty$ olacak şekilde $X(z)$'nin yakınsaklık bölgesi açık halka olarak kabul edilir.

$X(z)$'nin iki polinomun oranı biçiminde z'nin rasyonel bir fonksiyonu olması en çok karşılaşılan durumdur. Pay polinomun kökleri $X(z)$'yi sıfır yapacağından $X(z)$'nin sıfırları olarak adlandırılır. Payda polinomunun kökleri olan z değerlerinde ise $X(z)$'nin değeri sonsuz olacağından, $X(z)$'nin kutupları olarak adlandırılır. Yakınsaklık tanımından dolayı kutuplar yakınsaklık bölgesi dışında olmalıdır. Yani,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \frac{A(z)}{B(z)} \tag{3.7}$$



Şekil 3.4 $x(n) = \delta(n)$ birim impuls dizisi için yakınsaklık bölgesi.

gösteriliminde, $A(z) = 0$ denkleminin kökleri sıfırları, $B(z) = 0$'ın kökleri ise kutupları oluşturacaktır.

Kutuplar payda polinomu $B(z)$'nin kökleri dışında, $z = 0$ veya $z = \infty$'da bulunabilir. Yukarıdaki tanımları ve özellikleri göstermek için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 3.1 $x(n) = \delta(n)$ dizisinin z-dönüşümü

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1 \tag{3.8}$$

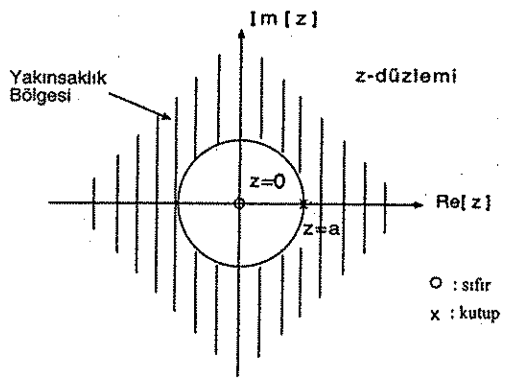
olur. Yakınsaklık bölgesi $0 \leqslant |z| \leqslant \infty$ olduğundan $X(z)$ tüm z-düzleminde yakınsaktır. Şekil 3.4'te $X(z) = 1$ için yakınsaklık bölgesi gösterilmektedir.

Örnek 3.2 Sağ taraflı üstel $x(n) = a^n u(n)$ dizisi için z-dönüşümü

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \tag{3.9}$$

yazılır. Burada $|az^{-1}| < 1$ için seri yakınsak olur ve

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \tag{3.10}$$



Şekil 3.5 $x(n) = a^n u(n)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi.

olarak bulunur. $|az^{-1}| < 1$ koşulundan $|z| > |a|$ yazılabilir. Şekil 3.5'te gösterildiği gibi yakınsaklık bölgesi a yarıçaplı dairenin dışında kalan bölgedir. $X(z)$'nin $z = 0$'da bir sıfırı ve $z = a$'da bir kutbu vardır.

Örnek 3.3 Sol taraflı bir diziye örnek olarak aşağıdaki diziyi ele alalım.

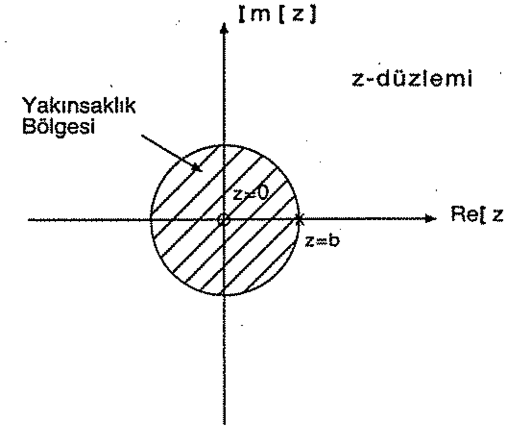
$$x(n) = \begin{cases} 0, & n \geqslant 0 \text{ için} \\ -b^n, & n \leqslant -1 \text{ için} \end{cases} \tag{3.11}$$

$x(n)$'nin z-dönüşümü için

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -b^{-n} z^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} z^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (b^{-1} z)^n \end{aligned} \tag{3.12}$$

yazılabilir. Eğer $|b^{-1}z| < 1$ veya $|z| < |b|$ ise (3.12)'deki seri yakınsar. Yani

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 - \frac{1}{1 - b^{-1}z} \\ &= \frac{-b^{-1}z}{1 - b^{-1}z} = \frac{z}{-b + z} = \frac{z}{z - b} \end{aligned} \tag{3.13}$$



Şekil 3.6 $x(n) = -b^n u(-n-1)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi.

olarak bulunur. Şekil 3.6'da görüleceği gibi yakınsaklık bölgesi b yarıçaplı dairenin içinde kalan alandır.

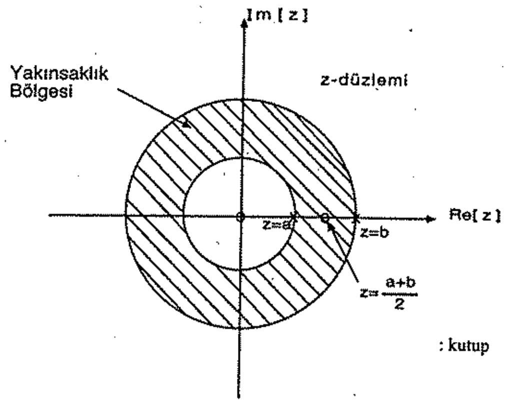
Açıklama 3.1 Son iki örnekteki dizilere ait z-dönüşümlerinin incelenmesinden, sadece z-dönüşümünün sıfırları ve kutupları yardımıyla dizileri belirlemenin mümkün olmadığı görülmektedir. Gerçekten $a = b$ olması halinde, (3.10) ve (3.13)'den sağ ve sol taraflı dizilerin z-dönüşümleri aynı olmaktadır. Farklı olan özellik ise yakınsaklık bölgeleridir. O halde, diziyi belirlerken z-dönüşümünün yanısıra yakınsaklık bölgesi de verilmelidir. Dizinin sağ veya sol taraflı olarak belirtilmesi durumunda da yakınsaklık bölgesi dolaylı olarak verilmiş olur.

Örnek 3.4 İki taraflı diziye örnek olarak

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geqslant 0 \text{ için} \\ -b^n, & n < 0 \text{ için} \end{cases} \tag{3.14}$$

dizisinin z-dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \;. \end{aligned} \tag{3.15}$$



Şekil 3.7 $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi.

(3.10) ve (3.13)'de $|az^{-1}| < 1$ ve $|b^{-1}z| < 1$ koşullarının sağlanması durumunda (3.15),

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{z-b} + \frac{z}{z-a} \\ &= \frac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabilir. Yakınsaklık bölgesi Şekil 3.7'deki gibi yarıçapları a ve b olan halka içindedir. Yani, $|a| < |b|$ ise, $|a| < |z| < |b|$ yakınsaklık bölgesidir. Çok kullanılan z-dönüşüm çiftleri Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

Teorem 3.2 (Doğrusallık). $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ herhangi iki dizi ve z-dönüşümleri

$$\mathcal{Z}[x_1(n)] = X_1(z) \tag{3.17}$$

$$\mathcal{Z}[x_2(n)] = X_2(z) \tag{3.18}$$

olarak verilsin. a ve b herhangi iki sabit katsayı ise

$$X_3(z) = \mathcal{Z}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(z) + bX_2(z) \tag{3.19}$$

olarak elde edilir.

Tablo 3.1 Standart z-Dönüşümleri

Dizi	z-Dönüşümü	Yakınsaklık Aralığı
$\delta(n)$	1	tüm z
$\delta(n-m),\ m>0$	z^{-m}	$\|z\| < 0$
$\delta(n+m),\ m>0$	z^{m}	$\|z\| < \infty$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$u(n)\cos n\theta$	$\frac{1-(\cos\theta)z^{-1}}{1-2(\cos\theta)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$u(n)\sin n\theta$	$\frac{(\sin\theta)z^{-1}}{1-2(\sin\theta)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$u(n)r^n\cos n\theta$	$\frac{1-r(\cos\theta)z^{-1}}{1-2r(\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|r\|$
$u(n)r^n\sin n\theta$	$\frac{r(\sin\theta)z^{-1}}{1-2r(\sin\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|r\|$

Tanıt.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[ax_1(n) + bx_2(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax_1(n) + bx_2(n)] z^{-n} \\ &= a\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)z^{-n} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n} \\ &= aX_1(z) + bX_2(z) \end{aligned} \tag{3.20}$$

$X_3(z)$ nin yakınsaklık bölgesi en azından $X_1(z)$ ve $X_2(z)$'nin yakınsaklık bölgelerinin arakesitini kapsar. Yani,

$$R_{x_3} \supset (R_{x_1} \cap R_{x_2}) \tag{3.21}$$

R_{x_1} ve R_{x_2}'nin sınırında bulunan bir kutbun, (3.19) toplamı sonucu ortaya çıkan bir sıfır ile yokedilmesi durumunda R_{x_3} yakınsaklık bölgesi $R_{x_1} \cap R_{x_2}$'den daha geniş olur. □

Teorem 3.3 (Öteleme).

a)

$$\mathcal{Z}[x(n+m)] = z^m X(z) \tag{3.22}$$

Eğer $x(n)$ dizisi sağ taraflı ise, yani $n < 0$ için $x(n) = 0$ olursa, pozitif m tamsayısı için aşağıdaki özelliklerin bulunduğu gösterilebilir.

b)

$$\mathcal{Z}[x(n+m)] = z^m \left\{ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right\} \tag{3.23}$$

c)

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = z^{-m} X(z) \tag{3.24}$$

Tanıt. (a)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n+m)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m) z^{-n} \\ &= z^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m) z^{-(n+m} \\ &= z^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-(k} = z^m X(z) \end{aligned}$$

□

Tanıt. (b)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n+m)] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m) z^{-n} \\ &= z^m \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m) z^{-(n+m)} \\ &= z^m \sum_{k=m}^{\infty} x(k) z^{-k} \\ &= z^m \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right] \\ &= z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right] \end{aligned}$$

□

Tanıt. (c) $n < 0$ için $x(n) = x(n-m) = 0$ olduğundan Teorem 3.3(a) uygulanırsa,

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$$

elde edilir.

Ötelenmiş $x(n-m)$ dizisi ile orijinal $x(n)$ dizisinin yakınsaklık bölgeleri aynıdır. Ancak, $z = 0$ veya $z = \infty$ noktası yakınsaklık bölgesi dışında olabilir. Birim gecikme durumunda $m = 1$'dir. (3.24) bağıntısından

$$\mathcal{Z}[x(n-1)] = z^{-1} X(z) \tag{3.25}$$

bulunur. (3.25) de $X(z)$, z^{-1} ile çarpılmıştır. Bu z^{-1} çarpanına birim gecikme operatörü adı verilir. Benzer şekilde, birim ilerleme durumunda

$$\mathcal{Z}[x(n+1)] = z X(z) \tag{3.26}$$

olur. □

Örnek 3.5

a) Geciktirilmiş impuls dizisi, $x(n) = \delta(n-m)$ için,

$$X(z) = \mathcal{Z}[\delta(n-m)] = z^{-m} \tag{3.27}$$

bulunur. $0 < |z| \leqslant \infty$ yakınsaklık bölgesidir. $z = 0$'da $X(z)$ yakınsamaz.

b) İlerletilmiş impuls dizisi, $x(n) = \delta(n+m)$ için,

$$X(z) = \mathcal{Z}[\delta(n+m)] = z^m \tag{3.28}$$

bulunacaktır. $X(z)$, $z = \infty$'da yakınsamadığından yakınsaklık bölgesi $0 \leqslant |z| < \infty$ olur.

Teorem 3.4 (Karmaşık Türev).

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz} \tag{3.29}$$

Tanıt.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[nx(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} \\ &-z\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{dz}(z^{-n}) \\ &-z\frac{d}{dz}\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-n})\Big] = -z\frac{dX(z)}{dz} \end{aligned} \tag{3.30}$$

$X(z)$ ve $\mathcal{Z}[nx(n)]$'nin yakınsaklık bölgeleri aynıdır. □

Örnek 3.6

$$x(n) = \begin{cases} na^n & n \geqslant 0 \text{ için} \\ 0 & n < 0 \text{ için} \end{cases} \tag{3.31}$$

dizisinin z-dönüşümünü Teorem 3.4 yardımıyla bulalım. Örnek (3.2)'den hatırlarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a} \tag{3.32}$$

olur. (3.30)'dan

$$\mathcal{Z}[na^n u(n)] = -z\frac{d}{dz}\Big\{\frac{z}{z-a}\Big\} = -z\frac{(-a)}{(z-a)^2} = \frac{za}{(z-a)^2} \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.31) ve (3.33)'ün karşılaştırılmasından yakınsaklık bölgelerinin değişmediği görülmektedir.

Teorem 3.5 (Gerçel konvolüsyon).

$$\mathcal{Z}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\Big] = X(z)H(z) \tag{3.34}$$

veya

$$\mathcal{Z}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)\Big] = X(z)H(z) \tag{3.35}$$

Tanıt.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\Big] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)z^{-(n-k)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ &= X(z)H(z) \end{aligned} \tag{3.36}$$

$X(z)H(z)$'nin yakınsaklık bölgesi $X(z)$ ve $H(z)$'nin yakınsaklık bölgelerinin arakesitini kapsar. Yani, $R \supset R_x \cap R_h$ olur. □

Açıklama 3.2 Herhangi iki dizinin konvolüsyonu sonucu elde edilecek dizinin z-dönüşümünün, dizilerin z-dönüşümlerinin çarpımı olduğu gerçel konvolüsyon teoreminden anlaşılmaktadır. Benzer şekilde, iki dizinin çarpımının z-dönüşümü dizilerin z-dönüşümlerinin kompleks konvolüsyonu olduğu gösterilebilir. Yani, $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$, $\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z)$ ise,

$$\mathcal{Z}[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(\nu)Y\Big(\frac{z}{\nu}\Big)\nu^{-1}d\nu \tag{3.37}$$

olur. (3.37)'deki çizgisel integralde Γ, $X(\nu)$ ve $Y(z/\nu)$ için ortak yakınsaklık bölgesinde yer alan bir konturu göstermektedir.

Teorem 3.6 (İlk Değer Teoremi). Eğer $x(n)$ nedensel bir dizi ise ($x(n) = 0$, $n < 0$),

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \tag{3.38}$$

Tanıt.

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} X(z) &= \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \\
&= x(0) + \lim_{z\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0)
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

□

Teorem 3.7 (Son Değer Teoremi). Nedensel $x(n)$ dizisinin z-dönüşümü $X(z)$ olsun. $(z-1)X(z)$'nin yakınsaklık bölgesi $z=1$'i kapsıyor ise,

$$
\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) \tag{3.40}
$$

Tanıt.

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\{x(k)-x(k-1)\}z^{-k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{x(k)-x(k-1)\}z^{-k} \tag{3.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\{x(k)-x(k-1)\}z^{-k} &= \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} x(k-1)z^{-k} \\
&= (1-z^{-1})X(z) - x(0)
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

yazılabilir. (3.41) ve (3.42)'den

$$
(1-z^{-1})X(z) - x(0) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{x(k)-x(k-1)\}z^{-k} \tag{3.43}
$$

elde edilir. $z=1$, $(1-z^{-1})X(z)$'nin yakınsaklık bölgesi içinde ise, (3.43) denkleminin her iki tarafının $z\to 1$ limiti alınır.

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) - x(0) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{z\to 1}\sum_{k=1}^{n}\{x(k)-x(k-1)\}z^{-k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{x(k)-x(k-1)\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\{x(n)-x(0)\} \\
&= \lim_{n\to\infty} x(n) - x(0)
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

Böylece,

$$
\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) \tag{3.45}
$$

olarak elde edilir. □

Teorem 3.8 (Parseval Teoremi).

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)]^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)X(z^{-1})z^{-1}dz \tag{3.46}
$$

C uygun olarak seçilmiş bir konturu göstermektedir.

Tanıt. (3.37) bağıntısında $x(n)=y(n)$ ve $z=1$ için

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)]^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(\nu)X(\nu^{-1})\nu^{-1}d\nu \tag{3.47}
$$

elde edilir. □

z-dönüşümünün diğer özellikleri Problem 3.1'de verilmektedir.

3.4 TERS z-DÖNÜŞÜMÜ

Cauchy integral teoremi [2] yardımıyla ters z-dönüşümünü elde etmek mümkündür. Bu önemli teoremi şöyle tanımlayabiliriz.

$$
x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1}dz = \begin{cases} 1, & k=0 \text{ için} \\ 0, & k\neq 0 \text{ için} \end{cases} \tag{3.48}
$$

(3.48) bağıntısında C orijini çevreleyen saat ibresinin ters yönünde kapalı bir konturu göstermektedir.

z-dönüşümü ilişkisi aşağıda verilmektedir.

$$
X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{3.49}
$$

(3.49)'un her iki tarafını z^{k-1} ile çarparak $X(z)$'nin yakınsaklık bölgesi içinde orijini çevreleyen C konturu üzerinde integrali alınırsa,

$$
\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n+k-1}dz \tag{3.50}
$$

elde edilir. Toplam ve integrasyon yer değiştirirse

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-n+k-1}dz \tag{3.51}$$

bulunur. Halbuki, (3.48)'deki Cauchy integral teoreminden,

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-n+k-1}dz = \begin{cases} 1, & n = k \text{ için} \\ 0, & n \neq k \text{ için} \end{cases} \tag{3.52}$$

olduğu bilinmektedir. (3.51) ve (3.52)'den ters z-dönüşüm bağıntısı olarak

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\Big[X(z)\Big] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz \tag{3.53}$$

bulunur. C saat ibresinin ters yönünde orjini çevreleyen kapalı bir kontur olup, $X(z)$'nin yakınsaklık bölgesi içindedir. Burada, (3.49) ve (3.53) bağıntıları birlikte z-dönüşüm çiftini oluştururlar.

Ters z-dönüşümü hesaplanırken (3.53)'deki kontur integralinin yerine pratikte daha basit olan yöntemler kullanılır. Şimdi, bu alternatif metodları inceleyelim.

3.4.1 Rezidü Metodu

Cauchy rezidü teoremi yardımıyla, z-dönüşümü

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{\prod_{i=1}^{K}(z-p_i)^{m_i}} \tag{3.54}$$

biçiminde olan rasyonel fonksiyonların, (3.53)'deki kontur integrali hesaplanabilir. (3.54)'de p_i kutbunun m_i katlı olduğu görülmektedir. Cauchy rezidü teoremine göre,

$$\begin{aligned} x(k) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz \\ &= \sum_{k=1}^{K}\left\{ \begin{array}{l} X(z)z^{k-1} \text{ teriminin } C \text{ konturu içindeki} \\ \text{tüm kutuplarına ait rezidüler} \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{3.55}$$

m katlı p kutbunun rezidüsü

$$\underset{z=p}{res}\{X(z)z^{n-1}\} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to p}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-p)^m X(z)z^{n-1}\} \tag{3.56}$$

bağıntısıyla bulunur. p kutbunun tek katlı olması durumunda

$$\underset{z=p}{res}\{X(z)z^{n-1})\} = \lim_{z\to p}\{(z-p)X(z)z^{n-1}\} \tag{3.57}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.7

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \; |z| > |a| \tag{3.58}$$

olarak verilen z-dönüşümünün tersini rezidü teorimini kullanarak bulalım.

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}dz \end{aligned} \tag{3.59}$$

Şekil 3.5'te görüldüğü gibi C sadece $z = a$'da yer alan tek bir kutbu çevrelemektedir. $n \geqslant 0$ için $x(n)$ değerleri

$$\begin{aligned} x(n) &= \underset{z=a}{res}\{X(z)z^{n-1}\} \\ &= \lim_{z\to a}\left\{(z-a)\frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}\right\} = a^n, \; n \geqslant 0 \text{ için} \end{aligned} \tag{3.60}$$

olarak bulunur. $n < 0$ için ise $X(z)z^{n-1}$ in $z = 0$'da n'ye bağlı olarak birden çok kutbu vardır. Örneğin, $n = -1$ için $z = a$ ve $z = 0$'daki rezidüleri toplayalım. (3.60)'da $n = -1$ konularak,

$$\begin{aligned} x(-1) &= \lim_{z\to a}\left\{(z-a)\frac{z^{-1-1}}{1-az^{-1}}\right\} + \lim_{z\to 0}\left\{z\frac{z^{-1-1}}{1-az^{-1}}\right\} \\ &= a^{-1} - a^{-1} = 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Benzer şekilde, $n = -2, -3, \ldots$ içinde rezidülerin toplamı sıfırdır. O halde,

$$x(n) = 0, n < 0 \text{ için} \tag{3.62}$$

bulunur. (3.60) ve (3.62)'den sonuç olarak

$$x(n) = a^n u(n) \tag{3.63}$$

elde edilir.

3.4.2 Kuvvet Serileri

A) Eğer z-dönüşümü z'nin kuvvet serisi şeklinde verilmişse, istenen dizinin n. elemanı $x(n)$'nin z^{-n} teriminin katsayısı olduğu gözlenir. Yani, z-dönüşümü

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{3.64}$$

polinomu biçimindedir.

Ancak, $X(z)$ (3.64)'deki gibi verilmeyip kapalı formda verilmiş ise uygun seri açılımı yazılır.

Örnek 3.8

$$X(z)=\log(1+az^{-1}),\ |a|<|z| \tag{3.65}$$

Kapalı formunda verilen z-dönüşümünün tersini seriye açarak bulalım.

$$\log(1+w),\ |w|<1$$

için Taylor serisine açılımını hatırlarsak,

$$\log(1+w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}w^n}{n},\ |w|<1 \tag{3.66}$$

yazılır. Bu sonucu (3.65)'de kullanırsak,

$$X(z)=\log(1+az^{-1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n}{n}z^{-n} \tag{3.67}$$

$x(n)$ (3.67)'den bulunabilir.

$$x(n)=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n}, & n\geqslant 1 \text{ için}\\ 0, & n<1 \text{ için}\end{cases} \tag{3.68}$$

veya

$$x(n)=\frac{-(-a)^n}{n}u(n-1) \tag{3.69}$$

elde edilir.

Örnek 3.9 $X_1(z)=2+3z^{-1}+4z^{-2}$ ve $X_2(z)=3+4z^{-1}+5z^{-2}+6z^{-3}$ olarak verimiş olsun. $X_3(z)=X_1(z)X_2(z)$'yi belirleyiniz.

Çözüm. Bu iki dizinin ters z-dönüşümleri $x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{2},3,4\}$ ve $x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{3},4,5,6\}$ olarak bulunur. z-dönüşümünün gerçel konvolüsyon özelliğini kullanırsak, bu iki dizinin konvolüsyonu olan dizi, aradığımız çarpım polinomunun katsayılarını verecektir. MATLAB kullanılarak

```
x1=[2 3 4]; x2=[3 4 5 6]; x3=conv(x1,x2);
```

Böylece

$$X_3(z)=6+17z^{-1}+34z^{-2}+43z^{-3}+38z^{-4}+24z^{-5}$$

olarak bulunur. □

B) Diğer bir ters z-dönüşümü yönteminde ise rasyonel formdaki z-dönüşümlerinden bölme işlemi sonucu kuvvet serisi bulunur.

Örnek 3.10 (3.58)'de verilen $X(z)$'nin kuvvet serisi biçiminde yazılabilmesi için aşağıdaki bölme işlemi yapılır.

$X(z)$'nin yakınsaklık bölgesi a yarıçaplı dairenin dışında olduğu için $x(n)$ dizisi sağ taraflıdır. O halde, bölüm sonucu z^{-1}'in kuvvetleri cinsinden bir seri elde edilir. Bölme işlemi yapılarak z'nin negatif kuvvetleri şöyle bulunur:

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\dots \\
1-az^{-1} & 1 \\
 & \underline{1-az^{-1}} \\
 & az^{-1} \\
 & \underline{az^{-1}-a^2z^{-2}} \\
 & a^2z^{-2} \\
 & \underline{a^2z^{-2}\quad -a^3z^{-3}} \\
 & a^3z^{-3} \\
 & \vdots
\end{array}$$

veya

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\dots \tag{3.70}$$

$$x(n)=a^nu(n) \tag{3.71}$$

bulunur.

Örnek 3.11 Yakınsaklık bölgesi farklı olan

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \ |z| < |a| \tag{3.72}$$

z-dönüşümünü ele alalım.

$z = 0$ noktası yakınsaklık bölgesi içindedir. O halde, $z = 0$'da $X(z)$ sınırlıdır. Buradan, $n \geqslant 0$ için $x(n) = 0$ olacağı ve dizinin sol taraflı olduğu anlaşılır. Bölme işlemiyle z'nin pozitif kuvvetleri bulunur. Önce

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \tag{3.73}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{array}{r|l}
 & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - \ldots \\ \hline
-a + z & z \\
 & z - a^{-1}z^2 \\ \hline
 & a^{-1}z^2 \\
 & a^{-1}z^2 \quad -a^{-2}z^3 \\ \hline
 & a^{-2}z^3 \\
 & a^{-2}z^3 - a^{-3}z^3 \\ \hline
 & a^{-3}z^3 \\
 & \vdots
\end{array}$$

elde edilir. Böylece,

$$x(n) = -a^n u(-n - 1) \tag{3.74}$$

bulunur.

Örnek 3.12 Payının derecesi paydanın derecesinden daha büyük olan aşağıdaki z-dönüşümünün tersini bölme işlemiyle bulalım.

$$X(z) = \frac{z^{-2} + 2z^{-1} + 2}{z^{-1} + 1}, \ |z| > 1 \tag{3.75}$$

Bölme işlemi sonucu,

$$X(z) = 2 + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} - z^{-5} + \ldots \tag{3.76}$$

elde edilir. O halde,

$$x(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2, & n = 0 \\ 0, & n = 1 \\ (-1)^n, & n \geqslant 2 \end{cases} \tag{3.77}$$

bulunur. (3.77)'den

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n - 1) + (-1)^n u(n) \tag{3.78}$$

yazılabilir.

C) Rasyonel formda verilen z-dönüşümünün tersinin bulunmasında Jury [4,5] tarafından formüle edilen aşağıdaki yöntem kullanılabilir. Buna göre,

$$X(z) = \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + \ldots + b(n)z^{-n}}{1 + a(1)z^{-1} + \ldots + a(n)z^{-n}} \tag{3.79}$$

olarak verilmiş ise,

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots + x(n)z^{-n} + \ldots \tag{3.80}$$

Kuvvet serisinin katsayıları,

$$x(0) = b(0) = \Delta_1 \tag{3.81}$$

$$x(1) = \begin{vmatrix} 1 & a(1) \\ b(0) & b(1) \end{vmatrix} = b(1) - a(1)b(0) = \Delta_2 \tag{3.82}$$

$$x(1) = \begin{vmatrix} 1 & a(1) & a(2) \\ 0 & 1 & a(1) \\ b(0) & b(1) & b(2) \end{vmatrix} = \Delta_3 \tag{3.83}$$

$$x(1) = \begin{vmatrix} 1 & a(1) & a(2) & a(3) \\ 0 & 1 & a(1) & a(2) \\ 0 & 0 & 1 & a(1) \\ b(0) & b(1) & b(2) & b(3) \end{vmatrix} = \Delta_4 \tag{3.84}$$

determinantları yardımıyla bulunur. Ayrıca, bu determinantlar özyineli (rekürsif) olarak da hesaplanabilir.

$$\Delta_1 = x(0) = b(0) \tag{3.85}$$

$$\Delta_{n+1} = x(n) = b(n) - \sum_{i=1}^{n} \Delta_{n+1-i}a(i), \ n = 1, 2, \ldots \tag{3.86}$$

$$\Delta_{n+1+k} = -\sum_{i=1}^{n} \Delta_{n+1+k-i}a(i), \ k > n \text{ için} \tag{3.87}$$

(3.85) ve (3.87)'deki işlemler bir bilgisayar algoritması yardımıyla kolaylıkla programlanabilir.

3.4.3 Kısmi Kesirlere Açılım

z-dönüşümü $X(z)$'nin, iki polinomun oranı şeklinde rasyonel biçiminde olması durumunda bu yöntem kullanılır. Eğer, pay polinomunun derecesi paydanın derecesinden daha küçük ve kutupların tamamı birinci dereceden ise,

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = X_1(z) + X_2(z) + \ldots = \sum_{k=1}^{N} X_k(z) \tag{3.88}$$

ve

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + \ldots = \sum_{k=1}^{N} x_k(n) \tag{3.89}$$

yazılabilir. $X_1(z), X_2(z), \ldots$ tek kutuplu z-dönüşümleridir. z-dönüşümünün doğrusallık özelliğinden

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{Z}^{-1}[X_k(z)] \tag{3.90}$$

elde edilir.

p_k, $X(z)$'nin tek katlı kutuplarını gösterdiğine göre

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}}, \; |z| > r \tag{3.91}$$

formunda yazılabilir. Ayrıca her bir terimin ters z-dönüşümü bir üstel dizi olacağından, $X(z)$'nin ters z-dönüşümü Tablo 3.1'den

$$x(n) = \sum_{k=1}^{N} R_k p_k^n u(n) \tag{3.92}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.13 Aşağıdaki $X(z)$ fonksiyonunu tersini bulalım.

$$X(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \tag{3.93}$$

$X(z)$ önce kısmi kesirlerine ayrılır.

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{2}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{z - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \end{aligned} \tag{3.94}$$

(3.91) ve (3.92)'den faydalanarak

$$\begin{aligned} x(n) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1) \\ &= 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right] u(n-1) \end{aligned} \tag{3.95}$$

bulunur.

Açıklama 3.3 Eğer payın derecesi paydanın derecesinden büyük ise, önce bölme işlemi, sonra kesirlere açılım işlemi gerçekleştirilir. Buna göre, pay polinomu $A(z)$'nin derecesi M ve payda polinomu $B(z)$'nin derecesi N olsun. Ayrıca, kutupların yine basit ve tek katlı olduklarını varsayalım. O halde açılım,

$$\begin{aligned} X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} &= \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-N}} \\ &= c_{M-N} z^{M-N} + c_{M-N-1} z^{M-N-1} \ldots + c_1 z + c_0 + \frac{R(z)}{B(z)} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k}}_{M \geqslant N} + \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} \end{aligned} \tag{3.96}$$

olur. Burada c_k değerleri bölüm sonucu bulunur. $R(z)$ ise derecesi $M'' = N - 1$ olan kalan polinomudur. $R(z)/B(z)$ kısmi kesirlere açılabilir. (3.91) ve (3.96)'dan $X(z)$'nin tersi

$$x(n) = \sum_{j=1}^{M-N} c_j \delta(n-j) + \sum_{k=1}^{N} R_k p_k^n u(n) \tag{3.97}$$

olarak elde edilir. R_k'ları bulmak için

$$R_k = \lim_{z \to p_k} (z - p_k) X(z) \tag{3.98}$$

bağıntısı kullanılır.

MATLAB'de `residuez` komutu kullanılarak rasyonel bir z-dönüşümü ifadesinin rezidüleri ve kalan polinomu bulunabilir. $X(z)$'nin (3.96) da olduğu şekilde iki polinomun bölümü olduğunu varsayalım. Bu pay ve payda polinomlarının katsayıları z^{-1}'in artan kuvvetlerine göre dizilmiş olsun ve `a` ile `b` vektörleri bu katsayıları belirtsin. Bu halde `[R,p,c]=residuez(a,b)` komutu $X(z)$ için rezidüleri, kutupları ve doğrudan katsayıları (c_k) verecektir. Sütun vektörü `R` rezidüleri, sütun vektörü `p` kutupları, satır vektörü `c` ise doğrudan katsayıları içermektedir. Eğer çok katlı kutuplar varsa çıkış vektörleri buna göre düzenlenecektir. Eğer aynı komutu `[a,b]=residuez(R,p,c)` şeklinde üç giriş ve iki çıkış olarak kullanırsak, bu kez kısmi kesir açılımından bölüm şeklindeki gösterilime geri dönüş sağlanır.

Örnek 3.14

$$X(z) = \frac{1 - 1.7z^{-1} + 0.95z^{-2} - 0.15z^{-3}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}}$$

fonksiyonunun kısmi kesir açılımını MATLAB kullanarak bulalım.

```
a=[1 -1.7 0.95 -0.15]; b=[1 -0.8 0.15]; [R,p,c]=residuez(a,b)
R =
    0.5000
   -0.5000
p =
    0.5000
    0.3000
c =
    1    -1
```

Böylece

$$X(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{10}z^{-1}} + 1 - z^{-1}$$

olarak elde ederiz.

3.4.4 Fark-Denklemi Çözümü

Verilen z-dönüşümü sayısal bir süzgecin transfer fonksiyonu olarak düşünülebilir. Öteleme teoreminden yararlanarak bu transfer fonksiyonuna karşı düşen fark denklemi bulunur. Bulunacak olan impuls cevabı ters z-dönüşümünü verir. Sayısal bir bilgisayar yardımıyla fark denkleminin çözümü kolaylıkla programlanabileceğinden bu yöntem özel bir önem taşır. Aşağıdaki basit örnek üzerinde bu tekniği inceleyelim.

Örnek 3.15 Aşağıdaki $F(z)$'nin tersini bulalım.

$$F(z) = \frac{z}{z + 1/2} \tag{3.99}$$

$F(z)$ transfer fonksiyonu biçiminde yazılabilir. Giriş işareti $x(n)$ ve çıkış işareti $y(n)$'nin z-dönüşümleri sırasıyla $X(z)$ ve $Y(z)$ olsun. O halde,

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z + 1/2} \tag{3.100}$$

ve

$$zY(z) + \frac{1}{2}Y(z) = zX(z) \tag{3.101}$$

yazılabilir. (3.101) denkleminin her iki tarafı z'ye bölünerek,

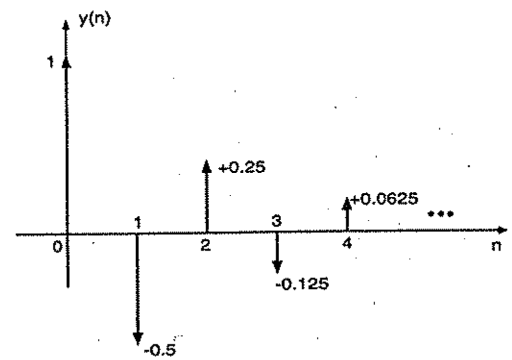
$$Y(z) = -\frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + X(z) \tag{3.102}$$

elde edilir. (3.102)'ye karşı düşen fark denklemi ise

$$y(n) = -\frac{1}{2}y(n-1) + x(n) \tag{3.103}$$

olur. Sistemin başlangıç koşulları sıfır varsayılarak $x(n) = \delta(n)$ giriş işaret için çıkış aşağıdaki gibi 5 aşamada hesaplanabilir. (3.99)'un impuls cevabı Şekil 3.8'de görülmektedir.

(1) n	(2) $x(n)$	(3) $y(n-1)$	(4) $(1/2)y(n-1)$	(5) $y(n) = (2) - (4)$
0	1 (ilk koşul)	0 (ilk koşul)	0	1
1	0	1	1/2	-1/2
2	0	-1/2	-1/4	1/4
3	0	1/4	1/8	-1/8
4	0	-1/8	-1/16	1/16
5	0	1/16	1/32	-1/32
6	0	-1/32	-1/64	1/64



Şekil 3.8 Ters z-dönüşümü: $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+0.5}\right]$.

REFERANSLAR

1. E. I. Jury, *Theory and Application of the Z-transform Method*, John Wiley, New York, 1964.
2. J. W. Brown ve R.V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1996.
3. A. Antoniou, *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York 1970.
4. E. I. Jury, "A New Formulation For Inverse Z-transformation", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, December, 1975.
5. E. I. Jury, *Inverse and Stability of Dynamic Systems*, John Wiley, New York, 1974.

PROBLEMLER

3.1 Aşağıdaki işaretlerin z-dönüşümlerini ve yakınsaklık bölgesini bulunuz.

a) $x(n = (1/2)^n u(n)$
b) $x(n) = (1/2)^n u(-n)$
c) $x(n) = e^n u(-n+1)$
d) $x(n) = a^{|n|}$

3.2 $h(n) = Ar^n \cos(n\omega_0 T + \theta)u(n)$ dizisinin z-dönüşümü $H(z)$'yi bulunuz. $0 < r < 1$ için sıfır-kutup diyagramını çiziniz ve yakınsaklık bölgesini gösteriniz.

3.3 Sonlu-sürekli $x(n) = a^n\big[u(n) - u(n-N)\big]$ dizisinin z-dönüşümü $X(z)$'yi bulunuz. Yakınsaklık bölgesini belirlerken sıfır ve kutuplarına dikkat ediniz.

3.4 $x(n)$ karmaşık değerli bir dizi olduğuna göre, $x(n)$'nin z-dönüşümü $X(z)$'nin aşağıdaki özelliklerini gösteriniz. ("$*$" kompleks eşleniği göstermektedir.)

a) $\mathcal{Z}[x^*(n)] = X^*(z^*)$
b) $\mathcal{Z}[x(-n)] = X(z^{-1})$
c) $\mathcal{Z}\Big[Re\{x(n)\}\Big] = (1/2)\Big[X(z) + X^*(z^*)\Big]$

d) $\mathcal{Z}\Big[Im\{x(n)\}\Big] = (1/2j)\Big[X(z) - X^*(z^*)\Big]$

3.5 $y(n) = x^2(n)$ dizisinin z-dönüşümünü, $x(n)$'nin z-dönüşümü $X(z)$ cinsinden belirleyiniz.

3.6 Deterministik $x(n)$ dizisi için özilişki fonksiyonu

$$r(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x^*(k+n)$$

olarak tanımlanır. Buna göre,

a) $R(z)$'yi $X(z)$ cinsinden bulunuz.
b) $R(z)$'nin yakınsaklık bölgesi nasıldır?
c) Yakınsaklık bölgesi birim daireyi ($|z| = 1$) kapsıyorsa, enerji spektrumu $R(e^{j\Omega})$'nın, $R(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})|^2$ olduğunu gösteriniz.
d) (3.47)'de verilen Parseval ilişkisini kullanarak toplam enerji $E = r(0)$'ı, $R(e^{j\Omega})$ cinsinden yazınız. Kontur integralini birim daire üzerinde alınız.

3.7 $H(z)$'nin aşağıdaki durumları için $h(n)$'yi bulunuz.

$$H(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 - z^{-1} - 0.75z^{-2}}$$

a) $R_h \supset \{z = 0\}$
b) $R_h \supset \{z = 1\}$
c) $R_h \supset \{z = \infty\}$

3.8 $h(n)$'nin z-dönüşümü

$$H(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 + z^{-1}}, \; |z| > 1$$

olduğuna göre,

a) Sıfır ve kutuplarını z-düzleminde gösteriniz
b) Tüm n değerleri için $h(n)$'yi bulunuz.
c) Bu süzgeç kararlı mıdır?

3.9 Sağ taraflı $x(n)$ dizisinin z-dönüşümü

$$X(z) = \frac{1}{z+2}$$

olarak verildiğine göre,

a) $n \to \infty$ iken $x(n)$'yi bulunuz. Son-değer teoremini kullanabilir misiniz?

b) $x(0)$ nedir?

3.10

$$X(z) = \frac{(z+2)(z-2)}{(z-1)(z^2+0.2z+0.8)}$$

için $n \to \infty$ iken $x(n)$'yi bulunuz. Son-değer teoremini kullanabilir misiniz?

3.11 Aşağıdaki fark-denklemi ile ifade edilen nedensel süzgecin impuls cevabını ve transfer fonksiyonunu bulunuz.

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = 3x(n-1) + x(n-2)$$

3.12 Aşağıdaki z-dönüşümleri için nedensel ters z-dönüşümlerini rezidü teoremini kullanarak bulunuz.

a) $X(z) = \dfrac{2z^2}{2z^2 - 2z + 1}$

b) $X(z) = \dfrac{1}{(z-0.8)^4}$

c) $X(z) = \dfrac{6z}{(2z^2+2z+1)(3z-1)}$

3.13 Aşağıdaki z-dönüşümleri için nedensel ters z-dönüşümlerini kısmi kesirlere açılım metodunu kullanarak bulunuz.

a) $X(z) = \dfrac{(z-1)^2}{z^2 - 0.1z - 0.56}$

b) $X(z) = \dfrac{4z^2}{(2z+1)(2z^2-2z+1)}$

3.14 Aşağıdaki $X(z)$'nin nedensel ters z-dönüşümünü bölme işlemi ile bulunuz.

$$X(z) = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$$

3.15 Aşağıda verilen dizilerin farklı yakınsaklık bölgelerine, fakat aynı z-dönüşümüne sahip olduklarını gösteriniz.

a) $x_1(n) = 6((0.5)^n - (0.3)^n)u(n)$

b) $x_2(n) = -6(0.5)^n u(-n-1) - 6(0.3)^n u(n)$

c) $x_3(n) = 6((0.3)^n - (0.5)^n)u(-n-1)$

3.16 $X(z)$, $x(n) = 0.3^n u(n)$ dizisinin z-dönüşümünü belirtsin.

a) $X(z^2)$'nin ters z-dönüşümünü $X(z)$'yi hesaplamadan bulunuz.

b) $(1 + z^{-1})X(z^2)$'nin ters z-dönüşümünü $X(z)$'yi hesaplamadan bulunuz.

3.17 Aşağıda verilen z-dönüşümleri için ters z-dönüşümünü bulunuz.

a) $Y_1(z) = \dfrac{z(z-1)}{(z+1)(z+\frac{1}{3})}, |z| < \frac{1}{3}$

b) $Y_2(z) = \dfrac{z(z-1)}{(z+1)(z+\frac{1}{3})}, \frac{1}{3} < |z| < 1$

c) $Y_3(z) = \dfrac{z(z-1)}{(z+1)(z+\frac{1}{3})}, 1 < |z|$

MATLAB UYGULAMALARI

M3.1

$$X(z) = \frac{1}{(1-0.4z^{-1})(1-0.6z^{-1})(1-0.8z^{-1})}, \quad |z| > 0.8$$

fonksiyonunun ters z-dönüşümünü MATLAB ve kısmi kesir açılımını kullanarak hesaplayınız (İpucu: `b` vektörünü bulmak için MATLAB'in `poly` komutundan faydalanabilirsiniz).

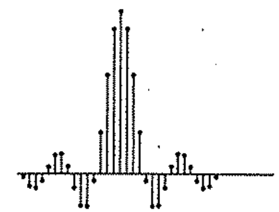
M3.2 Aşağıda verilen polinom işlemlerinin sonuçlarını MATLAB'de `conv` komutunu kullanarak hesaplayınız.

a) $(1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} - 2z^{-4})(z^{-1} - z^{-2} + 3z^{-4})$

b) $(z - 3 + 2z^{-1} - 2z^{-3})(z - 1 + 3z^{-2})$

M3.3 Aşağıda verilen transfer fonksiyonunun köklerini bulunuz ve z-düzleminde çiziniz. Bunun için MATLAB'de `roots` ve `zplane` komutlarını kullanabilirsiniz.

$$H(z) = 1 + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{5}z^{-3} + \frac{1}{6}z^{-4}$$



Bölüm 4
z-DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI

4.1 GİRİŞ

z-dönüşümünün ayrık-zamanlı sistem teorisinde oynadığı rol Laplace dönüşümünün sürekli-zamanlı sistem teorisindeki rolüne benzer [1-3]. z-dönüşümünün en önemli avantajlarından biri doğrusal fark denklemlerinin sistematik bir şekilde çözülmesinde sağladığı kolaylıktır. İki polinomun oranı biçiminde ifade edilen ayrık-zamanlı transfer fonksiyonu, sabit katsayılı doğrusal bir fark denklemine karşı düşer ve sayısal bir bilgisayar yardımıyla gerçekleştirilebilir. Bu bölümde, transfer fonksiyonunun fark denklemlerinden elde edilmesi gösterilecek, ayrıca impuls cevabı ve durum denklemlerinin karakterize edilmesi de tartışılacaktır.

Zaman ve frekans domeni analizleri, kararlılık ve kararlı duruma getirmek gibi konular z-dönüşümünün diğer uygulama alanları olarak incelenecektir.

4.2 TRANSFER FONKSİYONU

Bölüm 2.4'te impuls cevabı $h(n)$ olan bir ayrık zamanlı sistemin $x(n)$ giriş işareti için oluşturduğu çıkış işareti $y(n)$'nin konvolüsyon toplamı ile elde edildiği gösterilmişti.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \tag{4.1}$$

Konvolüsyon teoremi yardımıyla (4.1)'in z-dönüşümü

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{4.2}$$

olarak yazılır. Burada

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \tag{4.3}$$

ayrık-zamanlı sistemin transfer fonksiyonu olarak adlandırılır. $H(z)$ transfer fonksiyonu (4.2) yardımıyla

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{4.4}$$

olarak tanımlanabilir. O halde transfer fonksiyonu, çıkış işaretinin z- dönüşümünün giriş işaretinin z-dönüşümüne oranıdır.

Eğer sistemin impuls cevabı biliniyorsa, (4.3)'deki gibi z-dönüşümü alınarak transfer fonksiyonu bulunabilir. Ancak, fark denklemi, durum denklemi ve ayrık-zamanlı sistemin devre yapısı yardımıyla da transfer fonksiyonu (4.4)'deki tanımdan yararlanarak yazılabilir. Şimdi bunları inceleyelim.

4.2.1 Fark-Denklemlerinden

$a(0), a(1), a(2), \ldots, a(M)$ ve $b(1), b(2), \ldots, b(N)$ sabit katsayılar olduğuna göre doğrusal ve zamanla değişmeyen ayrık zamanlı sistemin giriş ve çıkış ilişkisi aşağıdaki fark denklemi ile belirlenebilir.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b(k)y(n-k) \tag{4.5}$$

Bu fark denkleminden transfer fonksiyonunu elde edebilmek için fark denkleminin her iki tarafının z-dönüşümü alınır. Böylece $Y(z)$'nin $Y(z) = H(z)X(z)$ formunda elde edilmesi sağlanır. Her iki tarafın z-dönüşümünü alır ve z-dönüşümünün öteleme ve doğrusallık özelliklerinden faydalanırsak,

$$Y(z) = X(z)\sum_{k=0}^{M} a(k)z^{-k} - Y(z)\sum_{k=1}^{N} b(k)z^{-k} \tag{4.6}$$

Buradan, $Y(z)$ içeren terimleri bir tarafa toplayarak $H(z)$ transfer fonksiyonunu elde ederiz.

$$Y(z)\Big(1 + \sum_{k=1}^{N} b(k)z^{-k}\Big) = X(z)\sum_{k=0}^{M} a(k)z^{-k} \tag{4.7}$$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{M} a(k)z^{-k}}{\Big(1 + \sum_{k=1}^{N} b(k)z^{-k}\Big)}}_{H(z)} X(z) \tag{4.8}$$

4.2.2 Durum Denklemlerinden

Bölüm 2.3'te açıklanan durum değişkenleri yardımıyla transfer fonksiyonu $H(z)$ bulunabilir. Durum denklemleri

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(n+1) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(n) + \mathbf{B}x(n) \\ y(n) &= \mathbf{C}\mathbf{q}(n) + dx(n) \end{aligned} \tag{4.9}$$

olarak verildiğine göre, birinci denklemin z-dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\mathbf{q}(n+1)] &= \mathbf{A}\mathcal{Z}[\mathbf{q}(n)] + \mathbf{B}\mathcal{Z}[x(n)] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{Q}(z) + \mathbf{B}X(z) \end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\mathcal{Z}[\mathbf{q}(n+1)] = z\mathcal{Z}[\mathbf{q}(n)] = z\mathbf{Q}(z) \tag{4.11}$$

yazılabilir. (4.10) ve (4.11)'den

$$z\mathbf{Q}(z) = \mathbf{A}\mathbf{Q}(z) + \mathbf{B}X(z) \tag{4.12}$$

veya

$$\mathbf{Q}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}X(z) \tag{4.13}$$

elde edilir. $\mathbf{I}$ boyutları $N \times N$ olan birim matrisi göstermektedir. Şimdi, (4.9)'daki ikinci denklemin z-dönüşümünden,

$$Y(z) = \mathbf{C}\mathbf{Q}(z) + dX(z) \tag{4.14}$$

yazılabilir. (4.13) ve (4.14)'de $\mathbf{Q}(z)$ yok edilerek

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + d \tag{4.15}$$

bulunur.

Örnek 4.1 (2.59)'da verilen fark denkleminden sayısal süzgecin transfer fonksiyonunu bulalım.

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) - y(n-1) + 2y(n-2)$$

denkleminden z-dönüşümü alınarak,

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) + 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) - z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) \\ Y(z)(1 + z^{-1} - 2z^{-2}) &= (1 + 2z^{-1} + z^{-2})X(z) \\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-1} - 2z^{-2}} \end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir.

Örnek 4.2 Bu örnekte, (4.16)'daki transfer fonksiyonuyla verilen sayısal süzgecin eşdeğer modelini (2.59) ve (2.60)'daki durum denklemlerinden bulalım. Buna göre,

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$
$$y(n) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + x(n) \tag{4.17}$$

durum denkleminden

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ d = 1 \tag{4.18}$$

olduğu açıktır. (4.15) bağıntısından

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + d \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ -2 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{z^2+z-2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 2 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{3+z}{z^2+z-2} + 1 = \frac{z^2+2z+1}{z^2+z-2} \end{aligned} \tag{4.19}$$

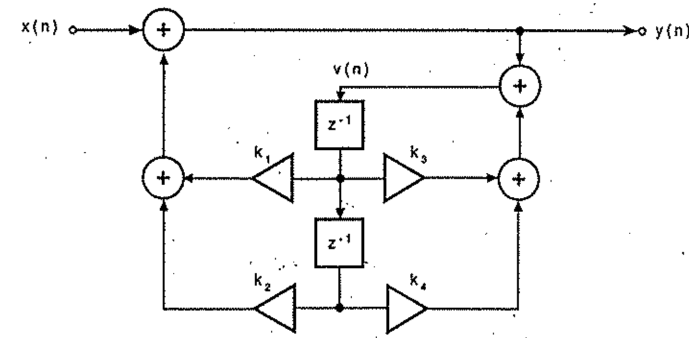
bulunur. Pay ve paydayı z^{-2} ile çarparsak (4.19)'dan

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}-2z^{-2}} \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.16) ve (4.29) ifadelerinin karşılaştırılmasından eşdeğer matematiksel modellerden aynı transfer fonksiyonunun bulunduğu görülmektedir.

4.2.3 Devre Yapısından

Sayısal süzgecin gerçekleştirilmesi için herhangi bir formda belirlenen giriş ve çıkış ilişkisi hesaplanabilir bir algoritmaya çevrilmelidir. Bu algoritmanın sayısal bir bilgisayar ve özel amaçlı bir donanım ile gerçekleştirilmesinde bazı temel işlemler kullanılır. Tablo 4.1'de gösterildiği gibi bu işlemler, birim gecikme, toplama ve çarpma işlemlerinden oluşmaktadır [3]. Buna göre z-domeni tanımları yardımıyla,

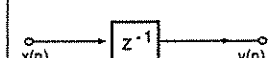
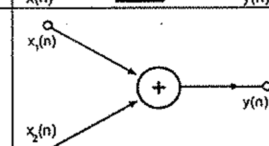
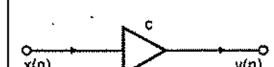


Şekil 4.1 İkinci dereceden sayısal süzgeç.

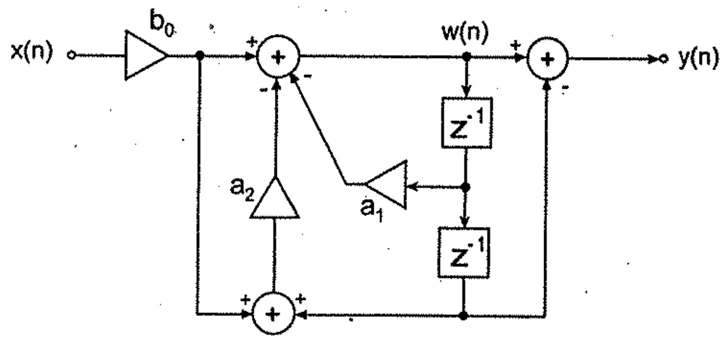
1. Birim gecikme: $Y(z) = z^{-1}X(z)$
2. Toplama : $Y(z) = X_1(z) + X_2(z)$
3. Çarpma: $Y(z) = cX(z)$

formunda gösterilebilir. O halde, verilen bir sayısal süzgeç devresinden analizini yapmak ve transfer fonksiyonunu elde etmek mümkündür.

Tablo 4.1 Sayısal Süzgeç Elemanları

	Sembol	Denklem
Birim Gecikme		$y(n) = x(n-1)$
Toplayıcı		$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$
Çarpıcı		$y(n) = cx(n)$

Örnek 4.3 Şekil 4.1'de verilen ikinci dereceden sayısal süzgecin transfer fonksiyonunu bulalım. Tablo 4.1'deki temel elemanları kullanarak,



Şekil 4.2 Birim kazançlı rezonatör.

$$V(z) = Y(z) + k_3 z^{-1} V(z) + k_4 z^{-2} V(z) \tag{4.21}$$

$$Y(z) = X(z) + k_1 z^{-1} V(z) + k_2 z^{-2} V(z) \tag{4.22}$$

yazılabilir. Burada $V(z)$ ve $Y(z)$

$$V(z) = \frac{Y(z)}{1 - k_3 z^{-1} - k_4 z^{-2}} \tag{4.23}$$

$$Y(z) = X(z) + (k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}) V(z) \tag{4.24}$$

şeklinde elde edilir. $V(z)$ yok edilerek;

$$Y(z) = X(z) + \frac{k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}}{1 - k_3 z^{-1} - k_4 z^{-2}} Y(z) \tag{4.25}$$

bulunur. O halde, transfer fonksiyonu $H(z)$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{1 - \dfrac{k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}}{1 - k_3 z^{-1} - k_4 z^{-2}}} = \frac{1 - k_3 z^{-1} + k_4 z^{-2}}{1 - (k_1 + k_3) z^{-1} - (k_2 + k_4) z^{-2}} \tag{4.26}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.4 Birim kazançlı rezonatör olarak da adlandırılan Şekil 4.2'deki sayısal süzgecin transfer fonksiyonunu bulalım. Temel elemanlar yardımıyla,

$$W(z) = b_0 X(z) - a_1 z^{-1} W(z) - a_2 (b_0 X(z) + z^{-2} W(z)) \tag{4.27}$$

$$Y(z) = W(z) - z^{-2} W(z) \tag{4.28}$$

yazılabilir. $W(z)$'nin yok edilmesi için

$$W(z)\left[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\right] = b_0 (1 - a_2) X(z) \tag{4.29}$$

bulunarak

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 (1 - a_2)(1 - z^{-2})}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{4.30}$$

4.3 KARARLILIK

Sayısal süzgeç tasarımında kararlılık çok önemli bir kavramdır. Kararlı olmayan sayısal süzgecin pratikte kullanılma olanağı yoktur. Bu nedenle, tasarlanan tüm sayısal süzgeçler kararlı olmak zorundadır. Kararlılığa ilişkin konuların incelenebilmesi için bazı ön bilgilere ihtiyaç vardır. Bunlar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

Tanım 4.1

Bir $\{x(n)\}$ dizisinin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \tag{4.31}$$

şartını sağlaması halinde, $\{x(n)\}$ dizisine mutlak değerli toplanabilir denir.

Tanım 4.2

Bir $\{x(n)\}$ dizisinin $M < \infty$ olan bir gerçel sabit için,

$$|x(n)| < M, \text{ tüm n için} \tag{4.32}$$

şartını sağlaması halinde, $\{x(n)\}$ dizisine sınırlı (değerli) denir.

Tanım 4.3

Herhangi bir sınırlı genlikli giriş dizisinin sınırlı genlikli bir çıkış dizisi ürettiği doğrusal zamanla-değişmeyen sayısal süzgeç sınırlı-giriş-sınırlı-çıkış (SGSÇ) anlamında kararlıdır.

Tanım 4.3 gereğince, bir süzgecin kararsız olduğunu gösterebilmek için sınırlı olmayan çıkış dizisi üreten bir sınırlı giriş dizisi bulmak yeterlidir. Oysa, aynı süzgecin kararlı olduğunu gösterebilmek için, her sınırlı giriş için çıkışların sonlu olduğunun gösterilmesi gerekir. Sonsuz sayıda sınırlı giriş dizisinin varlığı gözönüne alınacak olursa, pratikte Tanım 4.3'ten sayısal süzgecin kararlılığına karar verilmesi mümkün değildir. Aşağıdaki teorem SGSÇ kararlılık için gerek ve yeter koşulu göstermektedir.

Teorem 4.1 Bir sayısal süzgecin SGSÇ kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul, süzgecin impuls cevabı $\{h(n)\}$'nin mutlak değer toplanabilir olmasıdır. Yani

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| < \infty$$

şartı sağlanmalıdır.

Tanıt. Bu teoremin tanıtı Bölüm 2.1'de gösterilmiştir □

Ne var ki, Teorem 4.1'deki kararlılık kriteri yardımıyla da kararlılığı belirlemek pratikte güçtür. Önce süzgecin impuls cevabının bulunması, sonra mutlak değerlerinin toplanması gerekmektedir. Bu güçlüğü önlemek için sayısal süzgecin transfer fonksiyonundan kararlılığı belirleyen aşağıdaki teorem geliştirilmiştir. Kararlılık transfer fonksiyonu $H(z)$'den kolaylıkla belirlenebilecektir.

Teorem 4.2 (4.8)'deki gibi rasyonel transfer fonksiyonlu *nedensel* sayısal süzgecin kararlı olması için gerek ve yeter koşul transfer fonksiyonu $H(z)$'nin kutuplarının tümünün z-düzleminde birim daire içinde olmasıdır. Yani, $H(z)$'nin kutuplarının genliği birden küçük olmalıdır.

Tanıt. Önce kararlı sayısal süzgece ait transfer fonksiyonu $H(z)$'nin $|z| \geqslant 1$ koşulunu sağlayan bölgede yakınsak olduğunu gösterelim. Gerçekten,

$$\begin{aligned} |H(z)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|h(n)||z^{-n}| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| < \infty, \quad \text{tüm } |z| \geqslant 1 \text{ için} \end{aligned} \tag{4.33}$$

O halde, eğer sayısal süzgeç kararlı ise, $H(z)$'nin kutuplarından hiçbiri $|z| \geqslant 1$ bölgesinde bulunmaz. Başka bir deyişle $H(z)$'nin tüm kutupları birim dairenin içindedir.

Şimdi, eğer $H(z)$'nin tüm kutupları birim dairenin içinde ise sayısal süzgecin kararlı olduğunu gösterelim. Kolaylık sağlamak için $H(z)$'nin tüm kutuplarını birbirlerinden farklı olduğunu varsayalım. (4.8)'deki $H(z)$

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i z}{z - p_i} \tag{4.34}$$

şeklinde yazılabilir. O halde, Tablo 3.1'den,

$$h(n) = \sum_{i=1}^{N} A_i p_i^n \tag{4.35}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| &= \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{M} A_i p_i^n\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{N}|A_i|\sum_{n=0}^{\infty}|p_i|^n \end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir. Eğer tüm i için $|p_i| < 1$ ise,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}|p_i|^n &= \lim_{N_1\to\infty}\sum_{n=0}^{N_1}|p_i|^n \\ &= \lim_{N_1\to\infty}\frac{1-|p_i|^{N_1+1}}{1-|p_i|} \\ &= \frac{1}{1-|p_i|}, \quad \text{tüm } i \text{ için} \end{aligned} \tag{4.37}$$

Sayısal süzgecin sonlu sayıda kutbu olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| < \infty \tag{4.38}$$

bulunur. Buradan da sayısal süzgecin kararlı olduğu sonucuna varılır. □

Açıklama 4.1 Sayısal süzgecin kararlılığı sadece kutupların z-düzlemi üzerindeki yerine bağımlıdır. Sıfırların herhangi bir rolü yoktur. Geri beslemeli olmayan (FIR) süzgeçlerde transfer fonksiyonu $H(z)$'nin payda polinomu $B(z)=1$ olduğu için süzgeç daima kararlıdır.

Örnek 4.5 İkinci dereceden özyineli (rekürsif) sayısal süzgecin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \tag{4.39}$$

olarak verilmiş ise, bu sayısal süzgecin kararlı olduğu b_1 ve b_2 katsayılarını belirleyiniz.

Çözüm. Kutupların yerlerini belirlemek için,

$$\begin{aligned} B(z) &= 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \\ &= (1 - \lambda_1 z^{-1})(1 - \lambda_2 z^{-1}) \end{aligned} \tag{4.40}$$

yazılabilir. λ_1 ve λ_2 kökleri gerçel veya karmaşık olabilir.

Gerçel kökler ($b_1^2 \geqslant 4b_2$) için

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 - b_2} \tag{4.41}$$

Karmaşık kökler ($b_1^2 < 4b_2$) için

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{b_1}{2} \pm j\sqrt{\left(b_2 - \frac{b_1}{2}\right)^2} \tag{4.42}$$

bulunur. Karmaşık kökler birbirinin karmaşık eşleniğidir.

Bu durum için $\lambda_1 = \lambda_2^*$ olur. Kutupsal koordinatlar kullanılarak,

$$r = \sqrt{b_2} \tag{4.43a}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{b_1}{2\sqrt{b_2}}\right) \tag{4.43b}$$

tanımlanırsa,

$$\lambda_1, \lambda_2 = re^{\pm j\theta} \tag{4.44}$$

olarak elde edilir. O halde, (4.43a) ve (4.43b)'den,

$$b_2 = r^2 \tag{4.45a}$$

$$b_1 = -2r\cos\theta \tag{4.45b}$$

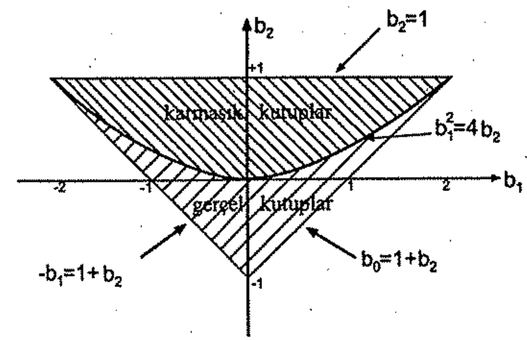
$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{4b_2}} \tag{4.45c}$$

bulunur. Kararlılık için kutupların birim dairenin içinde olması gerektiğinden

$$|b_2| < 1 \tag{4.46a}$$

$$|b_2 + 1| > \pm b_1 \tag{4.46b}$$

koşulları sağlanmalıdır. (4.46a) koşulu, (4.45a) ve genliğin birim daire içinde ($r < 1$) olmasından elde edilir. Sınırdaki $z = \pm 1$ noktalarında gerçek kutuplar olamayacağından (4.46b) koşulu bulunur. Şekil 4.3'te, (4.46)'daki kararlılık koşulları b_1, b_2 düzleminde gösterilmektedir. Kararlılık üçgeni olarak



Şekil 4.3 İkinci dereceden sayısal süzgeçin kararlı olduğu b_1 ve b_2 katsayılarının bölgesi.

adlandırılan bölge içinde seçilen b_1 ve b_2 değerleri için sayısal süzgeç kararlıdır. Kararlılık üçgeni dışındaki b_1 ve b_2 değerlerinde kararsız olur. Yukarıda belirtildiği gibi $b_1^2 < 4b_2$ için kutuplar karmaşık, aksi halde gerçeldir. □

Örnek 4.5'te gösterildiği gibi, ikinci dereceden sayısal süzgeçlerin kararlılığını kararlılık üçgeni yardımıyla kolaylıkla belirlemek mümkündür. Uygulamada IIR sayısal süzgeçler ikinci dereceden süzgeçlerin ardışıl (cascade) bağlanmasıyla gerçeklenebileceğinden, bu metod oldukça etkilidir. Ancak, derecesi ikiden daha büyük süzgeçlerde kutupların (payda polinomunun köklerinin) yerlerinin tam olarak belirlenmesi oldukça güçtür. Ayrıca, kararlılığın incelenmesi sırasında köklerin yerlerinin tam olarak bilinmesine de gerek yoktur. Önemli olan tüm köklerin z-düzleminde birim dairenin içinde olup olmamasıdır. Bundan dolayı, kökleri bulmaksızın kararlılığı test edebilecek bir metoda gerek vardır. Aşağıda Jury tarafından geliştirilen "kararlılık test tablosu" köklerin birim daireye göre dağılımı hakkında bilgi verir. Bu yöntem analog sistemlerde kullanılan Routh-Hurwitz kriterinin benzeridir.

Tablo Formunda Kararlılık Testi

[4,5] b_n'ler gerçel katsayılar ve $b_N > 0$ kabul edilerek payda polinomu

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_k z^k + \ldots + b_N z^N \tag{4.47}$$

şeklinde olsun. $B(z)$'nin köklerini bulmaksızın, tüm köklerinin birim daire içinde olup olmadığını gösteren bir kararlılık kriteri açıklanacaktır.

$B(z)$ polinomunun katsayıları, Tablo 4.2'de gösterilen Jury tablosunun oluşturulmasında kullanılır.

Tablo 4.2 Jury'nin Kararlılık Test Tablosu

Sıra	z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{N-2}	z^{N-1}	z^N
1	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{N-2}	b_{N-1}	b_N
2	b_N	b_{N-1}	b_{N-2}	$\cdots$	b_2	b_1	b_0
3	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{N-2}	c_{N-1}	
4	c_{N-1}	c_{N-2}	c_{N-3}	$\cdots$	c_1	c_0	
5	d_0	d_1	d_2	$\cdots$	d_{N-2}		
6	d_{N-2}	d_{N-3}	d_{N-4}	$\cdots$	d_0		
.	.	.	.	$\cdots$	.		
.	.	.	.	$\cdots$	.		
.	.	.	.	$\cdots$	.		
.	.	.	.	$\cdots$	.		
$2N-3$	r_0	r_1	r_2				

Tablonun ilk satırı $B(z)$'nin katsayılarının konulmasıyla elde edilir. İkinci satır ise, ilk satırın ters sırada yazılmasıyla bulunur. Üçüncü satırın elamanları da

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{N-k} \\ b_N & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \text{ için} \tag{4.48}$$

determinantlarından hesaplanır. Beşinci ve altıncı satırlar da benzer şekilde

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{N-1-k} \\ c_{N-1} & c_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-2 \text{ için} \tag{4.49}$$

determinantlarından bulunur. Bu işlem son satır $2N-3$ hesaplanıncaya kadar devam eder. Son satırın r_o, r_1 ve r_2 ile gösterilen üç elemanı vardır. Payda polinomu (4.47)'deki gibi olan ayrık-zamanlı bir sistemin kararlı olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerek ve yeterlidir.

1.

$$B(1) > 0 \tag{4.50}$$

2.

$$(-1)^N B(-1) > 0 \tag{4.51}$$

3. Jury tablosunun ilk sütunundaki elemanlara bakılarak, $(N-1)$ eşitsizlikten oluşan koşullar test edilir.

$$\left.\begin{array}{l} |b_0| < |b_N| \\ |c_0| > |c_{N-1}| \\ |d_0| > |d_{N-2}| \\ \vdots \\ |r_0| > |r_2| \end{array}\right\} (N-1) \text{ koşul} \tag{4.52}$$

Açıklama 4.2 İşlem kısalığı açısından, Jury tablosu oluşturulmadan önce (4.50) ve (4.51) koşulları kontrol edilir. Eğer bu koşullardan biri bile sağlanmıyorsa, sistem kararsızdır. Ayrıca tablo oluşturularak (4.52)'deki $(N-1)$ eşitsizliğin test edilmesine gerek yoktur.

Örnek 4.6 Eğer sayısal bir süzgecin payda polinomu

$$B(z) = 0.0025 + 0.08z + 0.4126z^2 - 1.368z^3 + z^4 \tag{4.53}$$

olarak verilmiş ise, köklerinin birim daireye göre dağılımını bulalım. $N = 4$ olan (4.53)'deki polinoma ait Jury tablosunu hazırlamadan önce, (4.50) ve (4.51)'deki gerekli koşulları yazarsak,

$$B(1) = 0.0025 + 0.80 + 0.4126 - 1.368 + 1 = 0.1271 > 0 \tag{4.54}$$

$$B(-1) = 0.0025 - 0.08 + 0.4126 + 1.368 + 1 = 2.708$$

ve

$$(-1)^N B(-1) = (-1)^4 2.708 > 0 \tag{4.55}$$

bulunur. (4.54) ve (4.55)'ten ilk iki koşulun sağlandığı görülmektedir. O halde, teste devam edebiliriz. $B(z)$ polinomunun katsayılarından Jury tablosu Tablo 4.6'da gösterilmiştir. Tablonun ilk sütunundaki elemanlardan (4.52) koşulları tesbit edilebilir.

$$\begin{array}{rcl} 0.0025 < 1 & , & |b_0| < b_N \\ 1 > 0.0834 & , & |c_0| > |c_{N-1}| \\ 0.9936 > 0.5256 & , & |d_0| > |d_{N-2}| \end{array} \tag{4.56}$$

(4.54), (4.55) ve (4.56)'dan $B(z)$'nin tüm köklerinin birim dairenin içinde olduğu görülür. Yani, sistem kararlıdır.

Tablo 4.3 Örnek 4.6 için Jury Tablosu

Sıra	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	0.0025	0.08	0.4126	-1.368	1
2	1	-1.368	0.4126	0.08	0.0025
3	$\simeq -1$	1.368	-0.4116	-0.0834	
4	-0.0834	-0.4116	1.368	-1	
5	0.9936	-1.402	0.5256		

Örnek 4.7 Sayısal süzgecin payda polinomunun

$$B(z) = 3 - 2z - (3/2)z^2 + z^3$$

olarak verilmesi durumunda köklerin birim daireye göre dağılımını bulalım.

Çözüm. (4.50) ve (4.51)'deki koşullardan,

$$B(1) = 3 - 2 - (3/2) + 1 > 0 \quad (4.57)$$

$$B(-1) = 3 + 2 - (3/2) - 1 > 0$$

$$(-1)^N B(-1) = (-1)^3 B(-1) < 0 \quad (4.58)$$

bulunur. (4.51) ve (4.58)'in karşılaştırılmasından ikinci koşulun sağlanmadığı görülmektedir. O halde, köklerin tümü birim dairenin içinde değildir. Tabloyu oluşturarak teste devam etmeye gerek yoktur. Sistem kararsızdır. □

4.4 KARARSIZ SİSTEMLERİN KARARLI DURUMA GETİRİLMESİ

Sayısal bir süzgecin tasarımında esas amaç, belirli bir frekans cevabı karakteristiğini sağlayan transfer fonksiyonu $H(z)$'nin bulunmasıdır. Tasarım sonucu bulunan transfer fonksiyonu istenen frekans özelliklerini sağlamasına karşılık kararlı olmayabilir. Pratikte kararsız süzgeçlerin kullanımı mümkün olmadığından kararsız $H(z)$'den faydalanılamaz. Ancak kararsız $H(z)$ transfer fonksiyonu, frekans karakteristiğini değiştirmeden kararlı bir transfer fonksiyonu elde edilecek biçimde değişikliğe uğratılabilir.

4.4.1 Resiprok Kutuplar Yöntemi

Süzgeç tasarımında, transfer fonksiyonu $H(z)$'nin genlik frekans karakteristiğini sağlaması ve kararsız olması durumunda $H(z)$'nin kararsızlığına neden olan kutuplar resiprokları ile değiştirilir. Birim dairenin dışında bir kutbu olan süzgecin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)(z - re^{j\theta})} \quad (4.59)$$

formundadır. Varsayım gereği $r > 1$ olup $re^{j\theta}$ kutbu kararsızlığa neden olmaktadır. (4.59)'dan

$$H'(z) = \frac{A(z)}{B(z)r(z - r^{-1}e^{j\theta})} = \frac{A(z)}{B(z)(rz - e^{j\theta})} \quad (4.60)$$

yazılabilir. $H'(z)$ transfer fonksiyonunun $re^{j\theta}$ kutbu $r^{-1}e^{j\theta}$ kutbuyla değiştirilir. $r^{-1}e^{j\theta}$ kutbuna $re^{j\theta}$'nın resiprokal kutubu denir.

Şimdi, $H(z)$ ve $H'(z)$ transfer fonksiyonlarının genlik cevaplarının aynı olduğunu gösterelim. Burada,

$$|H(e^{j\Omega})| = |H'(e^{j\Omega})|, \text{ tüm } \Omega \text{ için} \quad (4.61)$$

olduğunu ispat edebilmek için

$$|e^{j\Omega} - re^{j\Omega}| = |re^{j\Omega} - e^{j\Omega}|, \text{ tüm } \Omega \text{ için} \quad (4.62)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} |e^{j\Omega} - re^{j\Omega}| &= |\cos\Omega + j\sin\Omega - r\cos\theta - jr\sin\theta| \\ &= [(\cos\Omega - r\cos\theta)^2 + (\sin\Omega - r\sin\theta)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.63)$$

ve

$$\begin{aligned} |re^{j\Omega} - e^{j\Omega}| &= |e^{j\Omega}e^{j\theta}(re^{-j\Omega} - e^{-j\Omega})| \\ &= |(e^{-j\Omega} - re^{-j\Omega}| \\ &= [(\cos\Omega - r\cos\theta)^2 + (\sin\Omega - r\sin\theta)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.64)$$

elde edilir. (4.63) ve (4.64)'den, (4.61)'deki eşitlik doğrulanmış olmaktadır.

Örnek 4.8 Birinci dereceden transfer fonksiyonunun kararlı hale getirilmesi şöyle olur. Eğer $|a| > 1$ ise

$$H(z) = 1/(z+a) \tag{4.65}$$

kararsızdır. Kararlı duruma getirilmiş transfer fonksiyonu

$$H'(z) = \pm 1/(az+1) \tag{4.66}$$

olarak elde edilir. $H'(z)$'nin kutbu birim dairenin içindedir.

Örnek 4.9 İkinci dereceden bir süzgece ait transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1}{z^2+bz+c} \tag{4.67}$$

olarak verilsin. Örnek 4.5'den biliyoruz ki, eğer $c > 1$ ve $(c+1)^2 > b^2$ ise, transfer fonksiyonun iki kutbu da birim dairenin dışındadır. Her iki kutup ya karmaşık yada gerçeldir. $H(z)$'yi kararlı yapmak için

$$H'(z) = \frac{\mp 1}{cz^2+bz+1} \tag{4.68}$$

yazılabilir. $H'(z)$'nin kutupları birim dairenin içindedir.

Örnek 4.10 Kararsız transfer fonksiyonu,

$$H(z) = \frac{z^2+10}{(z+0.8)(z-2)(z^2+2z+3)} \tag{4.69}$$

resiprok kutuplar kullanılarak

$$H'(z) = \frac{\mp(z^2+10)}{(z+0.8)(-2z+1)(3z^2+2z+1)} \tag{4.70}$$

şeklinde kararlı duruma getirilebilir. Payın işareti eksi alınırsa $H'(1) \geqslant 0$ olarak elde edilecektir.

4.5 AYRIK İŞARETİN SIFIRLARI VE KUTUPLARI YARDIMIYLA GÖSTERİLİMİ

Pratikte karşılaşılan bir $x(k)$ işaretinin z-dönüşümü $X(z)$'nin iki polinomun oranı biçiminde yazılması mümkündür.

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} a_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}} \tag{4.71}$$

Gerçel işaretler için, $A(z)$ ve $B(z)$ polinomlarının katsayıları gerçel sayılardır. $X(z)$'nin kutupları p_k; $k = 1, 2..., N$ ve sıfırları z_m; $m = 1, 2..., M$ ile gösterilirse, (4.71)'deki ifade

$$X(z) = A_0 \frac{\prod_{m=1}^{M}(z-z_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)} \tag{4.72}$$

biçiminde yazılabilir. A_0 sabit bir sayıdır. O halde, (4.71)'deki gibi z-dönüşümü olan tüm işaretleri sıfırları ve kutupları yardımıyla gösterilebiliriz. Bu türden gerçel işaretlerin sıfırları ve kutupları ya gerçeldir yada karmaşık eşlenik çiftler biçimindedir.

Örnek 4.11 Aşağıdaki işaretin kutuplar ve sıfırlar formunda gösterilimini ele alalım:

$$x(n) = b^n u(n), \ |b| < 1 \text{ için} \tag{4.73}$$

z-dönüşümü alınarak,

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b}, \ |z| > |b| \text{ için} \end{aligned} \tag{4.74}$$

bulunur. $X(z)$ dönüşümünün $z_1 = 0$'da bir adet sıfırı ve $p_1 = b$'de bir kutbu vardır.

4.6 AYRIK İŞARETİN FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN BULUNMASI

Sayısal bir $x(n)$ işaretinin ayrık zaman Fourier dönüşümü şöyle tanımlanır:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \tag{4.75}$$

Bu tanımdan da görüldüğü gibi $X(\Omega)$ gerçel Ω değişkeninin sürekli ve karmaşık (kompleks) değerli bir fonksiyonudur.

$X(\Omega)$'nın varlığı için sağ taraftaki sonsuz toplamın sonlu olması gerekir. Yani, (4.75)'deki seri yakınsak olmalıdır. (4.75)'deki $e^{-j\Omega n}$ teriminin mutlak değerinin daima bire eşit olduğu gözönüne alınırsa $x(n)$ dizisinin mutlak değerlerinin toplanabilir olması yeterli bir koşuldur. Yani yakınsaklık için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \tag{4.76}$$

yeter koşuldur.

(4.76) koşulunu sağlayan tüm işaretlerin enerjilerinin sonlu olduğu gösterilebilir. Bu özellik aşağıdaki eşitsizliğin direkt bir sonucudur.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \Big]^2 \tag{4.77}$$

Yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı $x(n)$'nin enerjisidir. O halde, (4.76) koşulunu sağlayan işaretler (4.77) koşulunu da sağlarlar. Ancak, tüm sonlu enerjili işaretlerin mutlak değerlerinin toplamı sonlu olmak zorunda değildir. Bununla birlikte, pratikte karşılaşılan sonlu enerjili diziler (4.76) koşulunu sağlarlar ve Fourier dönüşümleri vardır [6].

Şimdi, sayısal işaretin Fourier dönüşümüne ilişkin bu kısa tanımlamadan sonra z-dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

$x(n)$ işaretinin z-dönüşümü $X(z)$ ile, Fourier dönüşümü $X(\Omega)$ arasındaki ilişkiyi göstermek için (3.1)'deki tanımı ele alalım:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{4.78}$$

z karmaşık değişkeni, z-düzleminde kutupsal koordinatlarla gösterilebilir.

$$z = re^{j\Omega} \tag{4.79}$$

Bu ilişki (4.78) denklemine yerleştirilecek olursa,

$$\begin{aligned} X(re^{j\Omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(re^{j\Omega})^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) r^{-k} e^{-j\Omega k} \end{aligned} \tag{4.80}$$

bulunur.

Bu ilişki, (4.75)'deki Fourier dönüşümü ile karşılaştırıldığı zaman, $r = 1$ için Fourier dönüşümü ile z-dönüşümünün birbirinin aynı olduğu görülmektedir. $|z| = 1$ için $r = 1$ olacağından,

$$X(z)\Big|_{|z|=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = X(\Omega) \tag{4.81}$$

bulunur. Diğer bir anlatımla, z-dönüşümünün birim daire üzerinde hesaplanması işaretin Fourier dönüşümünü vermektedir.

Açıklama 4.3 (4.75) ve (4.80)'in karşılaştırılmasından şu sonuç çıkmaktadır: (4.76) koşulu sağlanmadığı için verilen işaretin Fourier dönüşümü yakınsak olmasa bile, gerçek üstel r^{-k} terimi aynı işaretin z-dönüşümünün yakınsamasını sağlayabilir.

z-dönüşümü gösteriliminde birim dairenin oynadığı rol çok önemlidir. Teorem 4.2'de belirtildiği gibi z-dönüşümünün tüm kutupları birim dairenin içinde ise, ters dönüşüm kararlı, nedensel bir doğrusal sistemin impuls cevabıdır.

4.7 SAYISAL SÜZGEÇ ÇIKIŞININ TRANSFER FONKSİYONU YARDIMIYLA HESAPLANMASI

Verilen bir sayısal süzgecin transfer fonksiyonunun bulunmasına ilişkin yöntemler Bölüm 4.2'de ayrıntılı olarak tartışıldı. Şimdi, bulunan $H(z)$ transfer fonksiyonunu kullanarak bir sayısal süzgecin çıkışını hesaplayalım. Burada kullanılan yöntem oldukça basittir. Giriş dizisi $x(n)$'nin z-dönüşümü $X(z)$ ile süzgecin transfer fonksiyonu $H(z)$ çarpılarak çıkış işaretinin z dönüşümü bulunur, $Y(z) = H(z)X(z)$. $Y(z)$'nin ters z-dönüşümü çıkış dizisi $y(n)$'yi verir. Bölüm 3'te gösterilen ters z-dönüşüm metodlarından biri kullanılabilir. Aşağıda örnekte kısmi kesirlere açılım tekniği kullanılmaktadır.

Örnek 4.12 Transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1 + z + z^2}{2 + 3z + z^2} \tag{4.82}$$

olarak verilen bir sayısal süzgecin girişine $x(n) = 0.5^n u(n)$ dizisi uygulanırsa çıkış dizisi $y(n)$'yi bulalım.

Çözüm. Giriş dizisi $x(n)$'nin z-dönüşümü Tablo 3.1 kullanılarak

$$X(z) = Z[0.5^n u(n)] = \frac{z}{z - 0.5} \tag{4.83}$$

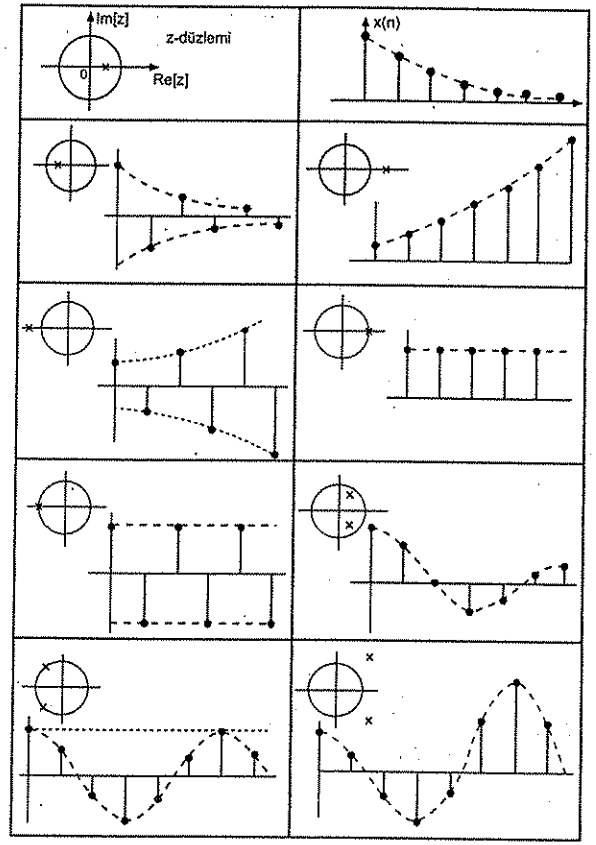
bulunur. (4.82) ve (4.83)'ten

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1 + z + z^2}{2 + 3z + z^2} \left\{ \frac{z}{z - 0.5} \right\} \tag{4.84}$$

yazılabilir. $Y(z)$ kısmi kesirlere açılarak

$$Y(z) = \frac{-2}{3} \left\{ \frac{z}{z+1} \right\} + \frac{6}{5} \left\{ \frac{z}{z+2} \right\} + \frac{7}{15} \left\{ \frac{z}{z - 0.5} \right\} \tag{4.85}$$

Tablo 4.4 Kutup Yerleri ile Zaman Cevapları Arasındaki İlişki.



$$y(n) = \left\{ -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{6}{5}(-2)^n + \frac{7}{15}(0.5)^n \right\} u(n) \tag{4.86}$$

bulunur. □

(4.85) ve (4.86) ile, sayısal süzgeç çıkışı $y(n)$ z-dönüşümündeki kutuplar tarafından belirlenmektedir. Bu nedenle, kutupların z-düzlemindeki yerleri ile bunlara karşı düşen cevaplar arasındaki ilişkinin bilinmesi yararlıdır. Tablo

4.4'te kutupların yerleri ile zaman cevapları arasındaki ilişki gösterilmektedir.

z-düzleminde birim dairenin içinde olan kutuplara karşı düşen cevaplar $n \to \infty$ iken sıfıra yaklaşır. Kutubun genliğinin küçülmesi cevabın sıfıra yaklaşımını hızlandırır. Eğer bir kutup birim dairenin dışında ise, cevabın genliği n ile birlikte artar. Eğer kutup birim daire üzerinde ve katsız ise, cevap sabit veya sabit genlikli salınımdır. Eğer kutup katlı bir kökse, cevap $n \to \infty$ iken sonsuza yaklaşır.

REFERANSLAR

1. A. Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1977.

2. L.B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

3. A. Antoniou, *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York 1970.

4. E. I. Jury and J. Blanchard, "A Stability Test for Linear Discrete Systems in Table Form", *Proc. Of The IRE*, vol. 49, December 1961.

5. E. I. Jury, *Inverse and Stability of Dynamic Systems*, John Wiley, New York, 1974.

6. A. Papoulis, *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

PROBLEMLER

4.1 DZD bir sistemin aşağıdaki fark-denklemi ile tanımlandığını varsayalım:

$$y(n) = 0.3y(n-1) + 0.3y(n+1) - 0.3x(n)$$

a) İmpuls cevabını bulunuz.
b) Transfer fonksiyonunu bulunuz.
c) Kararlılık ve nedenselliğini inceleyiniz.

4.2 İmpuls cevabı $h(n) = e^{-0.1n}u(n)$ olarak verilen sayısal süzgecin

a) Transfer fonksiyonunu bulunuz.

b) Fark-denklemi biçiminde modelleyiniz.

4.3 İmpuls cevabı sol-taraflı olan bir sistemin transfer fonksiyonu $H(z)$ olduğuna göre, sistemin kararlı olması için gerek ve yeter koşulun tüm kutupların birim daire dışında olması olduğunu gösteriniz.

4.4 Aşağıda transfer fonksiyonları verilen sayısal süzgeçlerin kararlılığını belirleyiniz.

a) $H(z) = \dfrac{z^6}{6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}$

b) $H(z) = \dfrac{(z+2)^2}{6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}$

4.5 Transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + 1/4}$$

olan nedensel sayısal süzgeç için,

a) $x(n) = u(n)\sin\omega_0 n$ girişine olan cevabı bulunuz.

b) Kararlı-durum çıkışını $(\lim_{n\to\infty} y(n))$ bulunuz.

4.6 Aşağıda fark-denklemleri ile ifade edilen DZD sistemlerin frekans cevaplarını bulunuz.

a) $y(n) = \dfrac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x(n-m)$

b) $y(n) - ay(n-1) = x(n)$

c) $y(n) = x(n) - x(n-L)$

4.7 Sayısal süzgeç frekans cevabına ilişkin faz cevabı $\theta(\Omega) = \angle H(e^{j\Omega})$ olarak verilir. Sayısal süzgeçlerde grup gecikmesi $\tau = -\dfrac{d\theta(\Omega)}{d\Omega}$ olarak tanımlandığına göre,

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2) + 4x(n-3) + 3x(n-4) + 2x(n-5) + x(n-6)$$

fark-denklemi ile gösterilen sistemin sabit grup gecikmeli olduğunu gösteriniz.

4.8 Aşağıda durum değişkenleri ile gösterilen süzgecin transfer fonksiyonunu bulunuz.

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \\ q_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ q_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ q_3(n) \end{bmatrix} + x(n)$$

4.9 Aşağıdaki $F(z)$ polinomunun tüm kökleri birim dairenin içinde ise, $G(z)$'nin tüm köklerinin z-düzleminde birim dairenin dışında olduğunu gösteriniz.

$$F(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_{N-1}z + a_N$$
$$G(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

MATLAB UYGULAMALARI

M4.1 Problem 4.4'te verilen transfer fonksiyonlarının kutuplarını MATLAB yardımıyla bulunuz ve çizdiriniz. Bunun için `zplane` komutunu kullanabilirsiniz. Çizdirdiğiniz sıfır-kutup diyagramlarından sistemlerin kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

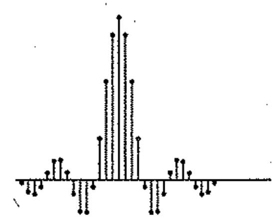
M4.2 `freqz` komutu, transfer fonksiyonu pay ve payda katsayı vektörleri girildiğinde frekans cevabını bulmakta ve çizdirmektedir. Bu komutla frekans cevabı, Ω'nın ayrık değerleri için bulunmaktadır. Problem 4.4'te verilen transfer fonksiyonları için `freqz` komutunu kullanrak frekans cevaplarını çizdiriniz.

M4.3 Bir sayısal süzgeç aşağıda verilen fark denklemi ile belirtilmiş olsun.

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + 0.7y(n-1) - 0.6y(n-2)$$

a) `freqz` komutunu kullanarak bu süzgecin genlik ve faz cevaplarını çizdirin. $\omega = \pi/3$ ve $\omega = \pi$'de oluşan genlik ve faz cevabı değerlerini not edin.

b) $x(n) = \cos(\pi n) + \cos(\pi n/3)$ işareti için 100 örnek oluşturup çizdiriniz. Bu işareti yukarıda verilen süzgeçten geçiriniz ve çıkışı çizdiriniz. Çıkışı gözlemlediğinizde, her iki sinüzoidin genlik ve fazları süzgeçten nasıl etkilendi?



Bölüm 5

ANALOG İŞARETLERİN SPEKTRUM ANALİZİ

5.1 GİRİŞ

İşaret analizinde spektrum kavramı esastır. Periyodik analog işaretlerin spektrumlarının incelenmesi Fourier serileri ile mümkün olmaktadır. Fourier serisi, periyodik işaretler için genel bir dik fonksiyon açılımı olarak tanımlanır [1]. Bu açılımda en iyi yöntem en küçük kareler yaklaşığıdır. Düzgün aralıklarla yapılan örnekleme ve periyodiklik matematik formülasyonda daima kabul edilen varsayımlardır. Diğer taraftan, Fourier integrali Fourier serisinin periyodunun sonsuza götürülmesi ile elde edilen limit durumdur [2].

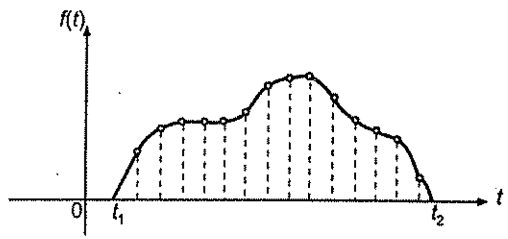
5.2 DİK VEKTÖR VE İŞARET UZAYLARI

Şekil 5.1'de görüldüğü gibi (t_1, t_2) aralığında zamanın tüm değerleri için tanımlanan $f(t)$ işaretini ele alalım. $f(t)$ işareti sınırlı zamanlı ve sonlu enerjilidir. Bu şekil $f(t)$'yi belirlemenin yollarından biridir. Bağımsız değişken t'nin herbir değeri için $f(t)$ işaretinin aldığı değeri göstermektedir. Zamanın belirli anlarında alınacak örneklerle bu işareti göstermek mümkündür. Eğer bu örnekleme aralıklarını sıklaştırırsak, $f(t)$'nin değişimini daha iyi biliriz. $f(t)$'yi tamamen belirlemek için sonsuz sayıda örneğe ihtiyaç olduğu açıktır.

Alternatif olarak, t değişkeninin seçimine bağlı bulunmayan sayılabilir bir sayı kümesi ile bu $f(t)$ işaretini belirlemek mümkündür. Diğer bir deyişle, $f(t)$ işaretini

$$f(t) = \sum_n f_n \Phi_n(t) \tag{5.1}$$

biçiminde ifade etmek istiyoruz. (5.1)'de $\Phi_n(t)$ belirlenecek bir dik fonksiyon



Şekil 5.1 Sınırlı zamanlı ve sonlu enerjili işaret

kümesini ve f_n'ler ise zamandan bağımsız sayıları göstermektedir.

Vektörleri sayılabilir bir sayılar kümesi ile göstermeye alışkın olduğumuzdan, öncelikle dik vektör uzayının bazı temel özelliklerini ele alacağız. Daha sonra, Fourier serisi kavramı genelleştirilmiş dik fonksiyonlar cinsinden ifade edilecektir.

5.2.1 Dik Vektör Uzayı

x ve y verilen vektörler ise, y vektörü x yönünde bulunan keyfi bir y' bileşeni ve hata vektörü e cinsinden ifade edilebilir. Bu durum Şekil 5.2(a)'da gösterilmektedir. O halde y vektörü,

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}' + \mathbf{e} = k\mathbf{x} + \mathbf{e} \tag{5.2}$$

$$\mathbf{y}' = k\mathbf{x}$$

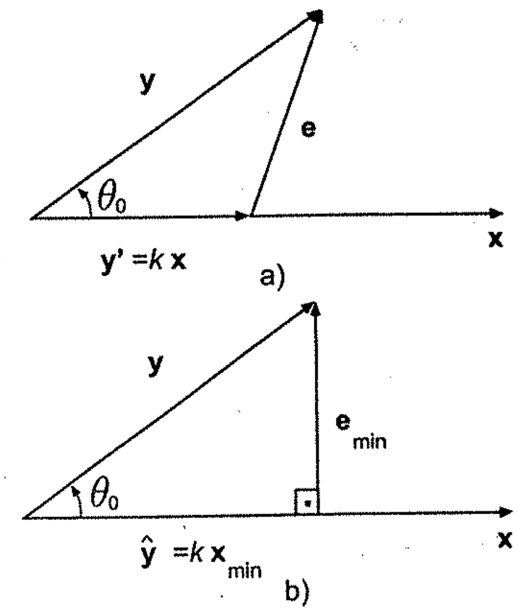
biçiminde yazılabilir. Şimdi hata vektörü e'yi minimum yapacak k değerinin bulunması gerekmektedir. $k = k_{min}$ hatayı minimum yapan değeri gösteriyorsa, y'nin ne kadarının x yönünde olduğunun ölçüsü k_{min} ile gösterilmektedir. Eğer $k_{min} = 0$ ise x ve y vektörleri diktir. Üçgenler için kosinüs kuralından

$$|\mathbf{e}|^2 = |\mathbf{y}|^2 + k^2|\mathbf{x}|^2 - 2|\mathbf{y}||\mathbf{x}|k\cos\theta \tag{5.3}$$

yazılabilir. Hatanın genliğinin karesi k'nın parabolik bir fonksiyonu olduğundan, $|\mathbf{e}|^2$'nin k'ya göre türevini sıfır yapan $k = k_{min}$ değeri, $|\mathbf{e}|^2$'yi de minimum yapar. Yani,

$$k_{min} = \frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} \tag{5.4}$$

olarak bulunur. (5.4) denkleminde k_{min}, iki vektörün skaler çarpımlarının oranı biçiminde ifade edilmektedir. N-boyutlu iki vektör



Şekil 5.2 Dik vektör uzayları; a) Hata vektörünün tanımı; b) Diklik.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix}^T \tag{5.5}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_N \end{bmatrix}^T \tag{5.6}$$

biçiminde yazılabildiğinden,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= <\mathbf{x},\mathbf{y}> = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_Ny_N \end{aligned} \tag{5.7}$$

yazılabilir. $k = k_{min}$ olduğu zaman, y'nin x yönündeki bileşeni $\hat{\mathbf{y}}$ olarak gösterilirse,

$$\hat{\mathbf{y}} = k_{min}\mathbf{x} = \left(\frac{\mathbf{y}^T\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}\right)\mathbf{x} \tag{5.8}$$

ilişkisi geçerlidir.

Hata vektörünün karesinin minimumu,

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}|^2_{min} &= |\mathbf{y}|^2(1-\cos^2\theta_0) = |\mathbf{y}|^2\sin^2\theta_0 \\ &= |\mathbf{y}|^2 - k^2_{min}|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 - |\hat{\mathbf{y}}|^2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

olmalıdır. Bu ise, hata vektörünün $k = k_{\min}$ için minimum olmasının yanısıra $\mathbf{x}$ vektörüne dik olduğunu göstermektedir. Yani, $\mathbf{e}_{\min} \perp \mathbf{x}$ dir. Şekil 5.2(b)'de bu durum görülmektedir. Eğer $\mathbf{e}_{\min} = [e_1 \ \ e_2 \ \ \ldots \ \ e_N]^T$ ise,

$$< \mathbf{e}_{\min}, \mathbf{x} > = \mathbf{e}_{\min} \cdot \mathbf{x} = \sum_{n=1}^{N} e_n x_n = 0 \tag{5.10}$$

(5.10) ilişkisi diklik koşulu olarak bilinir.

5.2.2 Dik İşaret Uzayı

Vektör uzayı kavramı işaret uzayı ve zamanın fonksiyonlarına genelleştirilebilir. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri yerine zamanın karmaşık değerli bir fonksiyonu olan $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerini ele alalım. (5.2) denklemine benzer şekilde, $y(t)$ işareti $x(t)$ ve hata fonksiyonu $e(t)$ cinsinden ifade edilebilir.

$$y(t) = kx(t) + e(t) \tag{5.11}$$

$kx(t)$ terimi $y(t)$'nin $x(t)$ fonksiyonu üzerine olan izdüşümüdür. $e(t)$ ise hata terimi olup

$$e(t) = y(t) - kx(t) \tag{5.12}$$

olarak yazılabilir. Sabit bir (t_1, t_2) zaman aralığında hatanın karesinin integralini minimum yapan k değeri $k = k_{\min}$ olarak gösterilirse, $k_{\min}$ vektör uzayındakine benzer şekilde bulunur.

"$*$" karmaşık eşleniği gösterirse, minimize edilecek hatanın karesinin integrali

$$\begin{aligned} < e(t), e(t) > &= \int_{t_1}^{t_2} e(t)e^*(t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |e(t)|^2 dt \end{aligned} \tag{5.13}$$

notasyonu ile gösterilir. (5.12)'den

$$|e(t)|^2 = [y(t) - kx(t)][y^*(t) - k^*x^*(t)] \tag{5.14}$$

ve

$$\begin{aligned} < e(t), e(t) > = &< y(t), y(t) > + |k|^2 < x(t), x(t) > \\ &- k < x(t), y(t) > - k^* < y(t), x(t) > \end{aligned} \tag{5.15}$$

(5.15) denkleminden, $k_{\min}$

$$k_{\min} = \frac{< y(t), x(t) >}{< x(t), x(t) >} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} y(t)x^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x(t)x^*(t)dt} \tag{5.16}$$

olarak bulunur. (5.4) ve (5.16) denklemlerinin karşılaştırılmasından, işaret ve vektör uzaylarında $k_{\min}$'in elde edilmesindeki benzerlik görülmektedir. Ayrıca (5.16) denkleminden $k_{\min} = 0$ yapılarak $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin dik olma koşulu

$$\int_{t_1}^{t_2} y(t)x^*(t)dt = 0 \tag{5.17}$$

olarak bulunur. $k = k_{\min}$ olduğu zaman $y(t)$ fonksiyonunun $x(t)$ üzerine olan izdüşümü $y'(t)$ olarak gösterilir ve

$$y'(t) = k_{\min} x(t) \tag{5.18}$$

olarak verilir. (5.18)'den minimum hatanın karesinin integrali

$$< e_{\min}(t), e_{\min}(t) > = < y(t), y(t) > - k_{\min}^2 < x(t), x(t) > \tag{5.19}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklem (5.9)'un benzeridir. Ayrıca, $k = k_{\min}$ olduğu zaman, $e(t) = e_{\min}(t)$, $x(t)$ işaretine dik olacaktır.

$$\int_{t_1}^{t_2} e_{\min}(t)x^*(t)dt = 0 \tag{5.20}$$

5.2.3 Genelleştirilmiş Dik Açılımlar

Fonksiyonların yaklaşık olarak ifadesi için dik işaret uzayı kavramı genelleştirilmiş dik açılımlar teorisi biçiminde genişletilebilir [3,4]. Bu genel teoride, Fourier serisi bir örnek olarak verilecektir. Verilen bir $f(t)$ fonksiyonunu, $\Phi_k(t)$ ile gösterilen fonksiyonların sabit katsayılarla çarpımlarının toplamı biçiminde yaklaşık olarak ifade etmek istiyoruz. O halde, $f(t)$'nin yaklaşık olarak ifadesi,

$$f'(t) = \sum_{k=-N}^{N} f_k \Phi_k(t) = \mathbf{F}^T \Phi(t) = \Phi^T(t)\mathbf{F} \tag{5.21}$$

biçiminde yazılabilir. (5.21) ifadesinde $\mathbf{F}$ sayısal katsayılardan oluşan vektörü gösterir.

$$\mathbf{F} = [f_{-N} \ \ \ldots \ \ f_{-1} \ \ f_0 \ \ f_1 \ \ \ldots \ \ f_N]^T \tag{5.22}$$

$\mathbf{\Phi}(t)$ ise bu açılımda kullanılan temel fonksiyonlardan oluşan vektörü göstermektedir.

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix}\Phi_{-N} & \ldots & \Phi_{-1} & \Phi_0 & \Phi_1 & \ldots & \Phi_N\end{bmatrix}^T \tag{5.23}$$

(5.13)'de olduğu gibi burada da temel amaç, sabit bir aralık üzerinde hata fonksiyonu $e(t)$'nin karesinin integralini minimum yapacak şekilde f_n katsayılarını belirlemektir. Hata fonksiyonu

$$e(t) = f(t) - f'(t) \tag{5.24}$$

biçiminde yazılır. (5.21) ve (5.24) yardımı ile,

$$e(t) = f(t) - \mathbf{\Phi}^T(t)\mathbf{F} \tag{5.25}$$

ve

$$e^*(t) = f^*(t) - \mathbf{F}^{T*}\mathbf{\Phi}^*(t) \tag{5.26}$$

elde edilir. Buradan hatanın karesinin (t_1, t_2) aralığındaki integrali,

$$\begin{aligned} < e(t), e(t) > &= \int_{t_1}^{t_2} e(t)e^*(t)dt \\ &=< f(t) - \mathbf{F}^T\mathbf{\Phi}(t), f(t) - \mathbf{\Phi}^T(t)\mathbf{F} > \\ &=< f(t), f(t) > + \mathbf{F}^T < \mathbf{\Phi}(t), \mathbf{\Phi}^T(t) > \mathbf{F}^* \\ &- \mathbf{F}^T < \mathbf{\Phi}(t), f(t) > - < f(t), \mathbf{\Phi}(t) > \mathbf{F}^* \end{aligned} \tag{5.27}$$

biçiminde yazılabilir. (5.27)'deki $< \mathbf{\Phi}(t), \mathbf{\Phi}^T(t) >$ terimi

$$\begin{aligned} < \mathbf{\Phi}(t), \mathbf{\Phi}^T(t) > &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{*T}(t)dt \\ &= [< \Phi_i(t), \Phi_j(t) >] \end{aligned} \tag{5.28}$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{\Phi}(t)$ bir sütun vektörü ve $\mathbf{\Phi}^{*T}(t)$ bir satır vektörü olduğundan $< \mathbf{\Phi}(t), \mathbf{\Phi}^T(t) >$ bir kare matrisi oluşturur. $< \Phi_i(t), \Phi_j(t) >$ gösterilimi sözkonusu matrisin terimlerini belirtmektedir. $\Phi_k(t)$ fonksiyonları birbirine dik ise, $i \neq j$ için $< \Phi_i(t), \Phi_j(t) >= 0$ olur. Böylece, $< \mathbf{\Phi}(t), \mathbf{\Phi}^T(t) >$ bir diyagonal matris biçimini alır.

$$< \mathbf{\Phi}(t), \mathbf{\Phi}^T(t) >= diag[< \Phi_i(t), \Phi_i(t) >]$$

$\mathbf{F}$'nin parabolik bir fonksiyonu olan (5.27) denklemi $\mathbf{F}$'nin elemanlarına bağlı olarak minimum yapılabilir. $\mathbf{F}$'nin herhangi bir terimi f_k için (5.27) aşağıdaki

gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} < e(t), e(t) > &=< f(t), f(t) > + f_k^2 < \Phi_k(t), \Phi_k(t) > \\ &- f_k < \Phi_k(t), f(t) > - f_k^* < f(t), \Phi_k(t) > \\ &- [f_k \text{ dan bağımsız olan terimler}] \end{aligned} \tag{5.29}$$

$\Phi_k(t)$ fonksiyonlarının dik oldukları varsayıldığından, (5.29) denklemi (5.15) ile aynı biçimdedir. f_k'ya göre alınacak türevin sıfıra eşitlenmesi ile (5.16)'nın benzeri elde edilir. Yani, $k = -N, \ldots, N$ için

$$f_k = \frac{< f(t), \Phi_k(t) >}{< \Phi_k(t), \Phi_k(t) >} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\Phi_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \Phi_k(t)\Phi_k^*(t)dt} \tag{5.30}$$

5.2.4 Fourier Serisi

Sınırlı (t_1, t_2) aralığında tanımlanan $f(t)$ fonksiyonunun sonlu Fourier serisi açılımı aşağıdaki fonksiyon kümesinden oluşmaktadır.

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}; \; k = 0, \pm 1, \ldots, \pm N \text{ için} \tag{5.31}$$

Eğer $\omega_0 = 2\pi/(t_2 - t_1)$ olarak seçilirse, $\Phi_k(t)$ fonksiyonlarının birbirine dik olacağı gösterilebilir. Yani,

$$\begin{aligned} < \Phi_m(t), \Phi_n(t) > &= \int_{t_1}^{t_2} e^{jm\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}dt \\ &= (t_2 - t_1)\delta_{mn} \end{aligned} \tag{5.32}$$

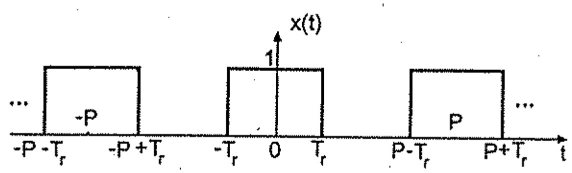
olarak yazılabilir. (5.32)'deki δ_{mn} Kronecker delta fonksiyonu olup $m \neq n$ için $\delta_{mn} = 0$ ve $\delta_{mm} = 1$'dir. P periyotlu $f(t)$ periyodik fonksiyonu için integral bir periyot üzerinde alınır. Yani, (t_1, t_2) aralığı $P = t_2 - t_1$ olacak şekilde işaretin herhangi bir bölümü olabilir.

$f(t)$ işaretinin Fourier serisi yaklaşıklığı (5.31)'deki dik fonksiyonlar kullanılarak elde edilir.

$$f'(t) = \sum_{k=-N}^{N} f_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.33}$$

Fourier serisi katsayıları, f_k'lar ise

$$f_k = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{5.34}$$



Şekil 5.3 Örnek 5.1 için kare dalga işareti.

ifadesinden kolayca elde edilebilir.

Açıklama 5.1 Periyodik işaretin Fourier serisinin var olması için işaret zayıf Dirichlet koşulları olarak adlandırılan şartları sağlamalıdır. Yani,

$$\int_{-P/2}^{P/2} |f(t)|dt < \infty \tag{5.35}$$

olmalıdır. Düzgün bir Fourier serisinin yakınsaklığını sağlamak için ise, $f(t)$ fonksiyonunun bir periyot içinde sonlu sayıda maksimum ve minimumu olmasının yanısıra sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip olmalıdır. Bu ilave koşullar (5.35) ile birlikte kuvvetli Dirichlet koşulları [5] olarak bilinir.

Açıklama 5.2 Dirichlet koşullarını sağlayan herhangi bir fonksiyon için, Fourier serisi gösterilimi tüm sürekli noktalarda $f(t)$'ye yakınsar. Ancak sonlu süreksizlik noktalarında yakınsanan değer, süreksizlik noktasının her iki yanındaki fonksiyon değerinin aritmetik ortalamasına eşit olmaktadır. Fourier serisindeki terimlerin sayısı (N) artırılırken, Fourier serisi gösteriliminin hatasının karesinin integrali azalır ve süreksizlik noktaları hariç yaklaşıklık giderek daha iyi duruma gelir. Bununla birlikte, süreksizlik civarındaki noktalarda Fourier serisi gösterilimi başarısızdır. Terim sayısının sonsuza ve hatanın karesinin integralinin sıfıra yaklaşması durumunda ortaya çıkan bu davranışa "*Gibbs olayı*" denir. Süreksizlik yakınında görülen sıçramanın fonksiyon değerinin yaklaşık yüzde 9'u kadar olduğu analitik olarak gösterilebilir.

Örnek 5.1 Şekil 5.3'de gösterilen kare dalga işareti için Fourier serisi açılımını bulunuz.

Çözüm. İşaretin periyodu P olmaktadır. Böylece $\omega_0 = 2\pi/P$ olarak bulunur. (5.34)'te verilen integral formülü kullanılarak Fourier serisi katsayıları bulunabilir. $x(t)$ çift-simetrik bir işaret olduğundan, integrali $(-P/2, P/2)$ aralığında

almak işlemi basitleştirecektir. $k \neq 0$ için,

$$\begin{aligned}
x_k &= \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{P}\int_{-T_r}^{T_r} e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{-1}{Pjk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_r}^{T_r} \\
&= \frac{2}{Pk\omega_0}\left(\frac{e^{jk\omega_0 T_r} - e^{-jk\omega_0 T_r}}{2j}\right) \\
&= \frac{2\sin(k\omega_0 T_r)}{Pk\omega_0}, \quad k \neq 0
\end{aligned}$$

$k = 0$ için,

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{P}\int_{-T_r}^{T_r} dt \\
&= \frac{2T_r}{P}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca L'Hopital kuralını kullanarak

$$\lim_{k\to 0} \frac{2\sin(k\omega_0 T_r)}{Pk\omega_0} = \frac{2T_r}{P}$$

olduğunu göstermekte mümkündür. Böylece genel olarak

$$x_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_r)}{Pk\omega_0}$$

yazabiliriz. $\omega_0 = 2\pi/P$ değişimini yaparsak, x_k, T_r/P oranının bir fonksiyonu olarak yazılabilir.

$$x_k = \frac{2\sin(k\frac{2\pi T_r}{P})}{k2\pi}$$

Bu örnekte, $\sin(\cdot)$ çift simetrik gerçel bir fonksiyon olduğu için $x_k = x_{-k}$ olmaktadır. Eğer bulduğumuz Fourier serisi katsayılarını Fourier toplamına yerleştirirsek,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{jk\omega_0 t} \\
&= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{jk\omega_0 t} + x_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \\
&= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2x_k \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} \\
&= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2x_k \cos(k\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

Eğer $b_x(0) = x_0$ ve $b_x(k) = 2x_k$, $k \neq 0$ tanımlamalarını yaparsak,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_x(k) \cos(k\omega_0 t) \tag{5.36}$$

sonucuna ulaşırız. □

Örnek 5.2 (5.36) için yaklaşık Fourier serisi toplamı, sadece ilk J tane terimin alınmasıyla,

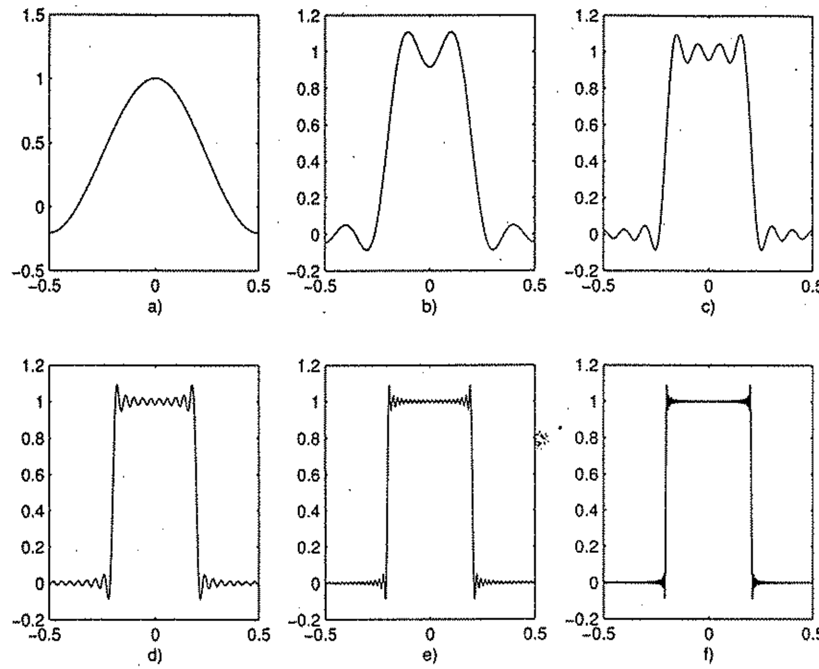
$$\hat{x}_J(t) = \sum_{k=0}^{J} b_x(k) \cos(k\omega_0 t)$$

olarak verilmektedir. $P = 1$ ve $T_r/P = 1/5$ varsayalım. Böylece,

$$b_x(k) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}, & k = 0 \\ \dfrac{2\sin(k\frac{2\pi}{5})}{k2\pi}, & k > 0 \end{cases} \tag{5.37}$$

olur. $J = 1, 5, 10, 25, 50$ ve 100 için $\hat{x}_J(t)$'nin bir periyodunu çizdiriniz.

Çözüm. Şekil 5.4'de yaklaşık toplamlar bir periyot için çizdirilmiştir. Yaklaşık toplamın, süreksizlik noktası $t = \pm\frac{1}{5}$ etrafında gösterdiği davranış önemlidir. Bu şekillerde yukarıda tartışılan Gibbs olayı gözlemlenmektedir. Süreksizlik noktasının her iki tarafında dalgalanmalar gözlenmektedir. J artırıldıkça hatanın enerjisi (dalgalanmanın enerjisi) azalsada, maksimum dalga yüksekliği değişmemektedir. Bu yükseklik yukarıda belirtildiği gibi süreksizliğin yaklaşık olarak % 9'u kadardır. Kare dalga Dirichlet koşullarını sağlamaktadır ve J



Şekil 5.4 Örnek 5.2 için çizdirilen yaklaşık Fourier serisi toplamları; a) $J = 1$; b) $J = 5$; c) $J = 10$; d) $J = 25$; e) $J = 50$; f) $J = 100$.

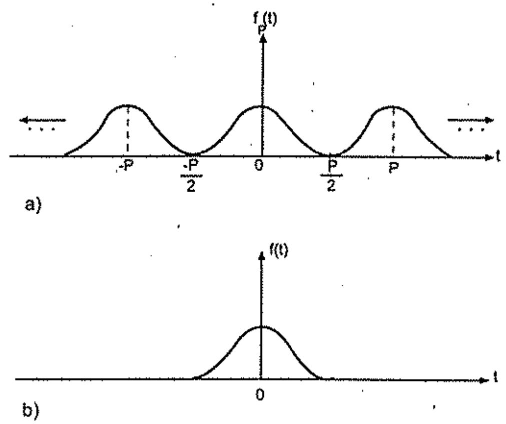
sonsuza giderken Fourier serisi toplamı $x(t)$'ye yakınsayacaktır. Ancak, sınırlı büyüklüklü J için her zaman dalgalanmalar mevcut olacaktır. □

5.3 FOURİER İNTEGRALİ (DÖNÜŞÜMÜ)

Periyodik bir fonksiyonun periyodunun sonsuza götürülmesiyle Fourier integrali geliştirebilir. Şekil 5.5'de bu durum görülmektedir. Yöntemi daha etkin yapmak için, istenen periyodik işaret orijine yerleştirilir ve P periyodu sonsuza yaklaşırken orjinden ölçülen limit simetrik olarak alınır.

Periyodik $f_P(t)$ fonksiyonu üstel Fourier serisi ile gösterilebilir.

$$f_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{jn\omega_0 t} \tag{5.38}$$



Şekil 5.5 Periyodik işaretten periyodik olmayan işaretin üretilmesi; a) Periyodik işaret; b) Periyodik olmayan işaret $f(t) = \lim_{P\to\infty} f_P(t)$

Burada

$$f_n = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f_P(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{5.39}$$

ve

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P} \tag{5.40}$$

ilişkileri kullanılmaktadır.

(5.39) denkleminden periyot P sonsuza götürülürse tüm Fourier serisi katsayılarının sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Bu nedenle, P'yi sonsuza götürecek limit alınmadan önce, aşağıdaki tanımlar yapılır.

$$\omega_n = n\omega_0 \tag{5.41}$$

$$F(\omega_n) = \lim_{P\to\infty} Pf_n \tag{5.42}$$

Bu tanımlar kullanılarak, (5.38) ve (5.39)

$$f_P(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \lim_{P\to\infty} \frac{1}{P}F(\omega_n)e^{j\omega_n t} \tag{5.43}$$

$$F(\omega_n) = \int_{-P/2}^{P/2} \lim_{P\to\infty} f_P(t)e^{-j\omega_n t}dt \tag{5.44}$$

olur. $f_P(t)$'nin spektrum çizgileri arasındaki uzaklık $\Delta\omega$ olarak tanımlanırsa

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{P} \tag{5.45}$$

ve P sonsuza götürülürse (sonuçta $\Delta\omega$ sıfıra gider), (5.43) şöyle olur:

$$f(t) = \lim_{\substack{P\to\infty \\ \Delta\omega\to 0}} \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)e^{j\omega_n t}\Delta\omega \tag{5.46}$$

(5.46)'daki limit alınırsa, $f_P(t)$'nin ayrık spektrum çizgileri birbirleriyle birleşik ve spektrum sürekli olur. Matematiksel olarak, (5.46)'daki sonsuz toplamı bir Riemann integralidir.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{5.47}$$

benzer şekilde, (5.44)'den

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{5.48}$$

elde edilir.

(5.47) ve (5.48) denklemleri standart Fourier integral dönüşümünü tanımlayan ilişkilerdir. (5.47) işaretin kompleks üstel fonksiyonlara ayrıştırılabileceğini gösterir. $F(\omega)$, ω rad/san'deki frekans bileşeninin büyüklüğünü gösterir.

Fourier integralini yukarıdaki gibi Fourier serisinin limit durumu olarak tanımlamak gerekmez, aksiyomatik bir yaklaşım kullanarak (5.47) ve (5.48) denklemleri doğrudan verilebilir. Ancak, Fourier serisi yoluyla verilen tanım $F(\omega)$'nın işlevine fiziksel bir anlam verir.

Fourier integralinin önemli olmasının tek sebebi periyodik olmayan işaretlerin spektral yoğunluğunu tanımlaması değildir. Tablo 5.1'de gösterilen özellikleri dolayısıyla da önemlidir. Bazı faydalı fonksiyonların Fourier dönüşümü Tablo 5.2'de görülmektedir.

Fourier integralinin varlığı için gerekli koşullar, Faurier serisi için bilinen Dirichlet koşullarından elde edilebilir [3]. Gerçekten, bazı işaretlerin Fourier integrali yoktur. (5.48)'deki tanım yardımıyla bu yargıya varabiliriz. Yani, $F(\omega)$ sonlu ise, dönüşüm vardır. $e^{-j\omega t}$'nin enerjisi birim olduğundan, Fourier integralinin varlığı için bir yeterli koşul

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty \tag{5.49}$$

olarak bulunur. $f(t)$'nin mutlak değerinin integralinin sonlu olmasını gerektiren bu koşul oldukça kısıtlayıcıdır. Örneğin, birim basamak işareti için bile bu koşul sağlanmaz. Bunun yerine, daha zayıf bir koşul olan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \tag{5.50}$$

kullanılabilir. (5.50) şartı enerji işareti tanımına karşı düştüğü için, Fourier dönüşüm herhangi bir enerji işaretini göstermede kullanılabilir.

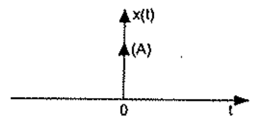
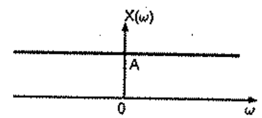
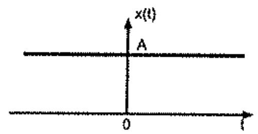
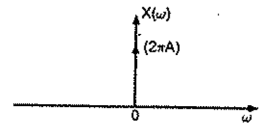
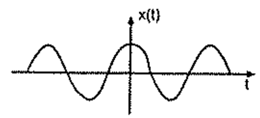
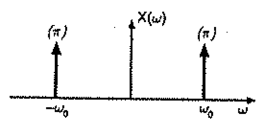
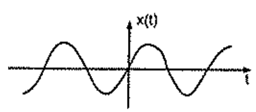
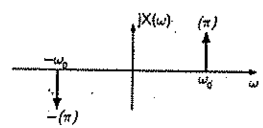
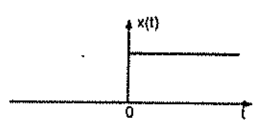
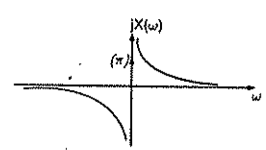
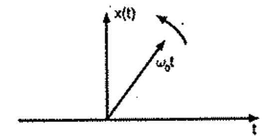
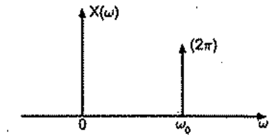
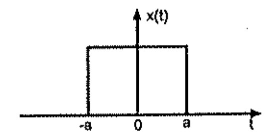
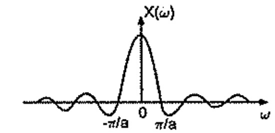
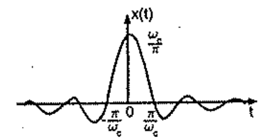
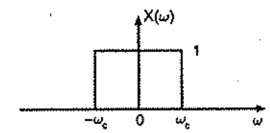
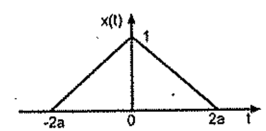
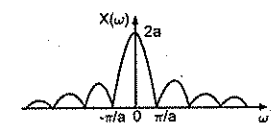
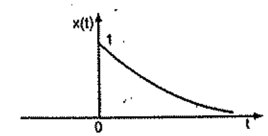
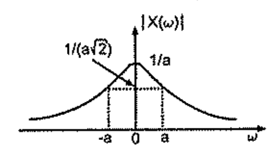
Tablo 5.1 Fourier Dönüşümü (İntegrali) Özellikleri

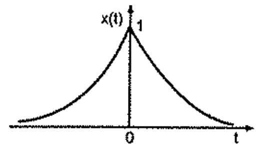
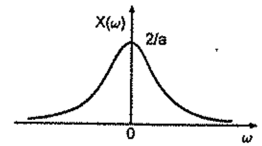
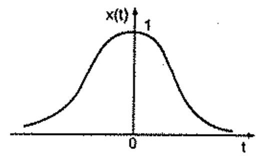
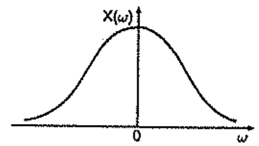
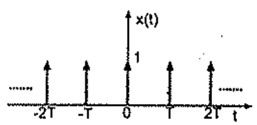
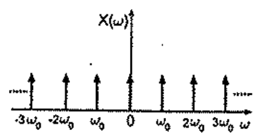
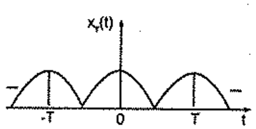
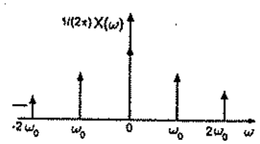
1	Doğrusallık	$\mathscr{F}[ax(t)+by(t)] = aX(\omega)+bY(\omega)$
2	Frekans kaydırma	$\mathscr{F}[x(t)e^{j\omega_0 t}] = X(\omega-\omega_0)$
3	Zaman kaydırma	$\mathscr{F}[x(t-t_0)] = X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
4	Zaman türevi	$\mathscr{F}[\frac{dx(t)}{dt}] = j\omega X(\omega)$
5	Zaman integrali	$\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau] = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$
6	Zaman domeninde konvolüsyon	$\mathscr{F}[x(t)*y(t)] = X(\omega)Y(\omega)$ $x(t)*y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$
7	Frekans domeninde konvolüsyon	$\mathscr{F}[X(\omega)*Y(\omega)] = x(t)y(t)$ $X(\omega)*Y(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)Y(\omega-\alpha)d\alpha$
8	Ölçekleme	$\mathscr{F}[x(at)] = \frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{\omega}{a})$; gerçel a için

Tablo 5.1 (devam)

9	Parseval Teoremi	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$
10	Dualite (Zaman-Frekans)	$\mathscr{F}[X(t)] = 2\pi x(-\omega)$
11	Korelasyon	$\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt] =$ $\mathscr{F}[x(t)*y(-t)] = X(\omega)Y^*(\omega)$
12	Karmaşık eşlenik	$\mathscr{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega)$
13	Genlik modülasyonu	$\mathscr{F}[x(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)+\frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$
14	Simetri (Çift-Tek)	$\mathscr{F}[x_{\text{çift}}(t)] = X_{\text{çift}}(\omega)$ $\mathscr{F}[x_{\text{tek}}(t)] = X_{\text{tek}}(\omega)$
15	Frekans türevi	$\mathscr{F}[tx(t)] = j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
16	Gerçel $x(t)$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ $Re[X(\omega)] = Re[X(-\omega)]$ $Im[X(\omega)] = -Im[X(-\omega)]$ $\lvert X(\omega)\rvert = -\lvert X(\omega)\rvert$ $\angle X(\omega) = -\angle X(\omega)$

Tablo 5.2 Bazı önemli Fourier dönüşümleri

1	İmpuls	 $x(t) = A\delta(t)$	 $X(\omega) = A$
2	Sabit	 $x(t) = A$	 $X(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$
3	Kosinüs	 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$	 $X(\omega) = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
4	Sinüs	 $x(t) = \sin(\omega_0 t)$	 $X(\omega) = j\pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$
5	Basamak	 $x(t) = u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$	 $X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
6	Kompleks üstel	 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$	 $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
7	Darbe	 $x(t) = u(t + a) - u(t - a)$	 $X(\omega) = 2a\frac{\sin(\omega a)}{\omega a}$
8	Sınırlı Bantlı İşaret	 $x(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$	 $X(\omega) = u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)$
9	Üçgen	 $x(t) = 1 - \frac{1}{2a}\lvert t\rvert;\ \lvert t\rvert < 2a$	 $X(\omega) = 2a\frac{\sin^2(\omega a)}{(\omega a)^2}$
10	Tek-taraflı üstel işaret	 $x(t) = e^{-at}u(t);\ a > 0$	 $X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$

11	İki-taraflı üstel işaret	 $x(t) = e^{-a\|t\|};\ a > 0$	 $X(\omega) = \dfrac{2a}{\omega^2 + a^2}$
12	Gauss işareti	 $x(t) = e^{-at^2}$	 $X(\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{\omega^2 4a}$
13	İmpuls treni	 $x(t) = x_T(t)$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ Fourier Serisi	 $X(\omega) = \dfrac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$ $\omega_0 \equiv 2\pi/T$
14	Periyodik işaret	 $x_T(t) = x_T(T + t)$ $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$ X_k:Fourier Serisi Katsayıları	 $X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$ $\omega_0 \equiv 2\pi/T$

REFERANSLAR

1. H. Dym and H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York, 1972.
2. L. B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
3. A. D. Poularikas, *The Transforms and Applications Handbook*, CRC Press, 2000.
4. R. M. Gray and J. W. Goodman, *Fourier Transforms: An Introduction for Engineers*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

PROBLEMLER

5.1 Legendre polinomları olarak adlandırılan fonksiyonların ilk üçü

$$\Phi_0(t) = 1;\ \Phi_1(t) = t;\ \Phi_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2};$$

olarak verildiğine göre,

a) Bu fonksiyonların $(-1, 1)$ aralığında birbirleri ile dik olduğunu gösteriniz.

b) $f(t) = |t|$ işaretini $(-1, 1)$ aralığında bu fonksiyon kümesini kullanarak ifade ediniz.

5.2 $f(t) = 2t$ işaretinin $(0, 1)$ aralığında üstel Fourier serisi gösterilimini bulunuz.

5.3 $f(t)$'nin Fourier dönüşümü $F(\omega)$ olduğuna göre, aşağıdaki özellikleri gösteriniz.

a) $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$

b) $|F(\omega)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$

5.4 $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ ise, aşağıdakilerin Fourier dönüşümünü belirleyiniz.

a) $f(1-t)$

b) $f\left[\left(\frac{t}{2}\right)-2\right]$

c) $\frac{df(t)}{dt}\cos t$

d) $\frac{d}{dt}[f(-2t)]$

5.5 $f(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}e^{-2\omega^2/(\omega^2+1)}$$

olarak verildiğine göre, dönüşüm özelliklerini kullanarak aşağıdakilerin Fourier dönüşümünü bulunuz.

a) $f(2t)$

b) $f(t-2)e^{jt}$

c) $4\frac{df(t)}{dt}$

d) $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

MATLAB UYGULAMALARI

M5.1 Örnek 5.2 için şekilleri çizdirmede kullanılan MATLAB programı aşağıda verilmiştir.

```
clear all; close all;
P=1; J_max=100;
Delta=P/(50*J_max);
k=[1:100];
b(1)=2/5;
b(2:101)=2*2*sin(k*2*pi/5)./(k*2*pi);
t=[-P/2:Delta:P/2];
x_j(1,:)=b(1)*cos(t*0*2*pi/P);
for j=2:101
    x_j(j,:)=x_j(j-1,:)+b(j)*cos(t*(j-1)*2*pi/P);
end
subplot(2,3,1), plot(t,x_j(2,:))
subplot(2,3,2), plot(t,x_j(6,:))
```



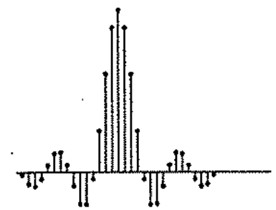
```
subplot(2,3,3), plot(t,x_j(11,:))
subplot(2,3,4), plot(t,x_j(26,:))
subplot(2,3,5), plot(t,x_j(51,:))
subplot(2,3,6), plot(t,x_j(101,:))
```

$T_r/P = 1/4$ için Örnek 5.2'yi tekrarlayınız. $b_x(k)$ katsayılarını hesaplayınız ve yukarıdaki programdan faydalanarak yaklaşık Fourier serisi toplamlarını çizdiriniz.

M5.2 Altta verilen MATLAB programı ile Fourier integralinin nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir. Burada örnek olarak Tablo 5.3'ün 10. maddesinde verilen $e^{-at}u(t)$ dizisi için Fourier integrali hesaplanmıştır. Hesaplanan Fourier integralinin tabloda verilen Fourier integrali fonksiyonuyla karşılaştırması da yapılmaktadır.

```
clear all; close all;
% Analog İşaret
a=1500;
dt = 0.00005; t_max=0.005;
t = -t_max:dt:t_max;
x= [zeros(1, t_max/dt) exp(-a*t(t_max/dt+1:end))];
% Sürekli-Zaman Fourier Dönüşümü (Fourier integrali)
omega_max = 2*pi*2000;
K = 500; k = 0:1:K;
% omega: -omega_max -> omega_max
omega = k*omega_max/K;
omega = [-fliplr(omega), omega(2:K+1)];
X = x * exp(-j*t'*omega) * dt;
X = abs(X);
subplot(1,1,1);
subplot(2,1,1); plot(t*1000,x);
xlabel('t  [msn]'); ylabel('x(t)');
title('Analog isaret');
subplot(2,1,2); plot(omega/(2*pi*1000),X*a);
xlabel('frekans [kHz]'); ylabel('|X(\omega)|*a');
title('Fourier integrali');
```

Yukarıdaki program üzerinde gerekli değişiklikleri yaparak, Tablo 5.3'ün 7. ve 8. maddelerinde verilen Fourier dönüşümü çiftleri için işaretleri ve Fourier dönüşümlerini hesaplayınız ve çizdiriniz.



Bölüm 6

ZAMAN VE FREKANS DOMENLERİNDE ÖRNEKLEME VE ÖRTÜŞME

6.1 GİRİŞ

Bu bölümün amacı, verilen bir işaretin zaman veya frekans domenlerinden birinde örneklenmesinin diğer domene olan etkisini incelemektir. Fourier dönüşümü $F(\omega)$ bilinen sürekli-zamanlı bir işaretin, frekans domeninde örneklenmesi sonucu zaman domeninde periyodik olan bir dalga formu bulunmaktadır. Buradan, örtüşmenin zaman domeninde tanımlanması yapılacak ve f_k Fourier serisi katsayılarından $F(\omega)$'nın bulunmasına ilişkin bağıntı çıkarılacaktır. Benzer şekilde, sürekli zamanlı bir $f(t)$ işaretinin zaman domeninde örneklenmesinin, frekans domeninde periyodik bir dalga formu oluşturduğu gösterilecektir. Sınırlı bant genişlikli bir $f(t)$ işaretini, $f(nT)$ örnekleri yardımıyla tamamen belirleyen Shannon teoreminin [1] ispatı verilecektir.

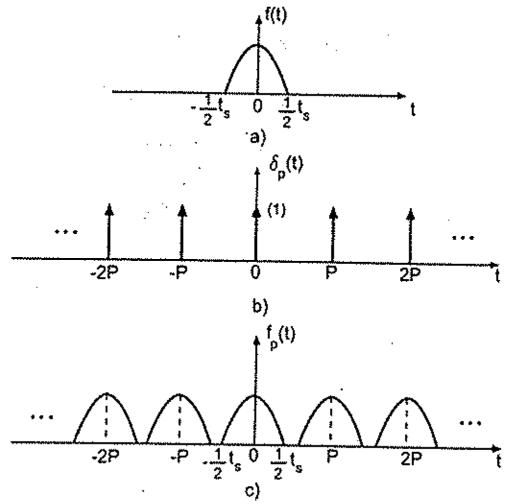
6.2 FREKANS DOMENİNDE ÖRNEKLEME

Tablo 5.1'den görüleceği üzere, zaman domeninde konvolüsyon işlemi frekans domeninde çarpıma karşı düşmektedir. Bu nedenle verilen bir analog $f(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü $F(\omega)$, $f(t)$'nin periyodik durumuna getirilmesiyle elde edilen $f_P(t)$'nin Fourier serisi katsayılarından belirlenebilir.

P periyotlu impuls treninin $f(t)$ işareti ile konvolüsyonundan, periyodik $f_P(t)$ dalga formunun elde edilmesi Şekil 6.1'de gösterilmektedir. Buna göre, sonsuz uzunlukta bir impuls treni

$$\delta_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kP) \tag{6.1}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan, $f(t)$ işaretinin periyodik olarak tekrarlanmış



Şekil 6.1 Aperiyodik bir fonksiyonun impuls treni ile konvolüsyonunun elde edilmesi; a) Zaman domeninde sınırlı $f(t)$ işareti; b) Periyodik impuls treni, $P > t_s$; c) Periyodik işaret.

biçimi

$$\begin{aligned} f_P(t) &= f(t) * \delta_P(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau-kP)d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kP) \end{aligned} \tag{6.2}$$

olarak elde edilir. Zaman domenindeki konvolüsyonun frekans domeninde çarpmaya karşı düşme özelliği kullanılarak, (6.2)'nin Fourier dönüşümü şöyle belirlenecektir.

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[f_P(t)] &= \mathscr{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kP)\right] \\ &= F(\omega)\mathscr{F}[\delta_P(t)] \end{aligned} \tag{6.3}$$

$\delta_P(t)$ periyodik impuls işareti kompleks Fourier serisine açılabilir. O halde,

$$\delta_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nP) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \tag{6.4}$$

olacaktır. (6.4) için $\omega_0 = \frac{2\pi}{P}$ olacaktır. $\delta_P(t)$'nin Fourier açılımı katsayıları d_k lar (5.41) ilişkisinden

$$d_k = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} \delta(t)dt = \frac{1}{P} \tag{6.5}$$

olarak bulunur. Ayrıca, Tablo 5.2'den,

$$\mathscr{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{6.6}$$

özelliği kullanılarak,

$$\mathscr{F}[\delta_P(t)] = \frac{2\pi}{P}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-k\omega_0) \tag{6.7}$$

elde edilir. (6.7)'de bulunan $\mathscr{F}[\delta_P(t)]$'nin değeri, (6.3)'de yerine konulursa, $f_P(t)$'nin Fourier dönüşümü bulunur.

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[f_P(t)] &= \mathscr{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kP)\right] \\ &= \frac{2\pi}{P}F(\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-k\omega_0) \end{aligned} \tag{6.8}$$

6.3 ZAMAN DOMENİNDE ÖRTÜŞME

$f_P(t)$'nin grafiği Şekil 6.1'de görülmektedir. Şekilde görüldüğü gibi, eğer $f(t)$ zaman domeninde sınırsız bir işaret ise, periyodik hale getirildiğinde işaretin kopyaları üst üste çakışacak ve zaman domeninde örtüşme olacaktır. Zaman domeninde örtüşme olmaması için, işaretin sınırlı ve örnekleme periyodunun yeterince büyük olması gerekmektedir. Yani,

$$P > t_s \tag{6.9}$$

ve

$$f(t) = \begin{cases} f(t); & -\frac{1}{2}t_s < t < \frac{1}{2}t_s \\ 0; & \text{diğer} \end{cases} \tag{6.10}$$

koşulları birlikte sağlanırsa zaman domeninde örtüşme olmayacaktır. (6.8) ilişkisinin sağ tarafı, $\omega = k\omega_0$ frekanslarında büyüklüğü $\frac{2\pi}{P}F(k\omega_0)$ olan bir dizi impulsu ifade etmektedir.

$f(t)$'nin bir periyodunun Fourier integrali

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-ts/2}^{ts/2} f(t)e^{-j\omega t}dt \end{aligned} \tag{6.11}$$

olarak bulunur. $f_P(t)$'nin Fourier serisi katsayıları ise,

$$f_k = \frac{1}{P}\int_{-t_s/2}^{t_s/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{6.12}$$

denkleminden bulunur. (6.12)'nin (6.11) ile karşılaştırılmasından $\omega = k\omega_0 = k\frac{2\pi}{P}$ için, $Pf_k = F(\omega)$ olur. Yani,

$$f_k = \frac{1}{P}F\left(k\frac{2\pi}{P}\right) \tag{6.13}$$

yazılabilir. O halde, $f_P(t)$'nin Fourier serisi açılımının

$$f_P(t) = \frac{1}{P}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(k\frac{2\pi}{P}\right) e^{jk(2\pi/P)t} \tag{6.14}$$

olduğu bulunur.

$F(\omega)$'nın $\omega = k(2\pi/P)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ ayrık frekans noktalarındaki değerlerinden, $f_P(t)$ periyodik işaretinin Fourier serisi katsayılarını belirlemek mümkündür. (6.13) ve (6.14) ilişkilerinden bu önemli sonuç elde edilmektedir.

$f(t)$'nin (6.10)'da gösterildiği gibi sınırlı olduğunu varsayalım. Buna göre, $-(t_s/2) \leqslant t \leqslant (t_s/2)$ için $f(t) = f_P(t)$ olduğu dikkate alınarak (6.14)'deki $f_P(t)$

(6.11)'de yerine konulursa, $F(\omega)$ için alternatif bir gösterilim bulunur.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{P}\int_{-t_s/2}^{t_s/2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(k\frac{2\pi}{P}\right)e^{jk(2\pi/P)t}\right]e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{P}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(k\frac{2\pi}{P}\right)\int_{-t_s/2}^{t_s/2} e^{-j(\omega-k(2\pi/P))t}dt \\ &= \frac{t_s}{P}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(k\frac{2\pi}{P}\right)\frac{\sin\left\{\left(\omega-k\frac{2\pi}{P}\right)\frac{t_s}{2}\right\}}{\left\{\left(\omega-k\frac{2\pi}{P}\right)\frac{t_s}{2}\right\}} \\ &= t_s\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\frac{\sin\left\{\left(\omega-k\frac{2\pi}{P}\right)\frac{t_s}{2}\right\}}{\left\{\left(\omega-k\frac{2\pi}{P}\right)\frac{t_s}{2}\right\}} \end{aligned} \tag{6.15}$$

(6.15) denklemindeki ifade $F(\omega)$'nın elde edilmesi için bir interpolasyon formülüdür [2]. Gerçekten, periyodik $f_P(t)$ işaretinin Fourier serisi katsayılarından, $f_P(t)$ işaretinin bir periyoduna ait olan Fourier dönüşümü bu denklemle bulunur.

Örnek 6.1 Şekil 6.2'de gösterilen periyodik kare dalganın Fourier serisinin katsayılarını kare dalganın Fourier dönüşümünden bulunuz. Tablo 5.2'den kare darbenin Fourier dönüşümü,

$$F(\omega) = Aa\frac{\sin(\omega a/2)}{\omega a/2} \tag{6.16}$$

olarak bulunur. (6.12)'de gösterildiği gibi, $\omega = k(2\pi/P)$ konularak,

$$f_k = \frac{Aa}{P}\frac{\sin(k\pi a/P)}{k\pi a/P} \tag{6.17}$$

olur. f_k'nın genliğini hesaplarsak,

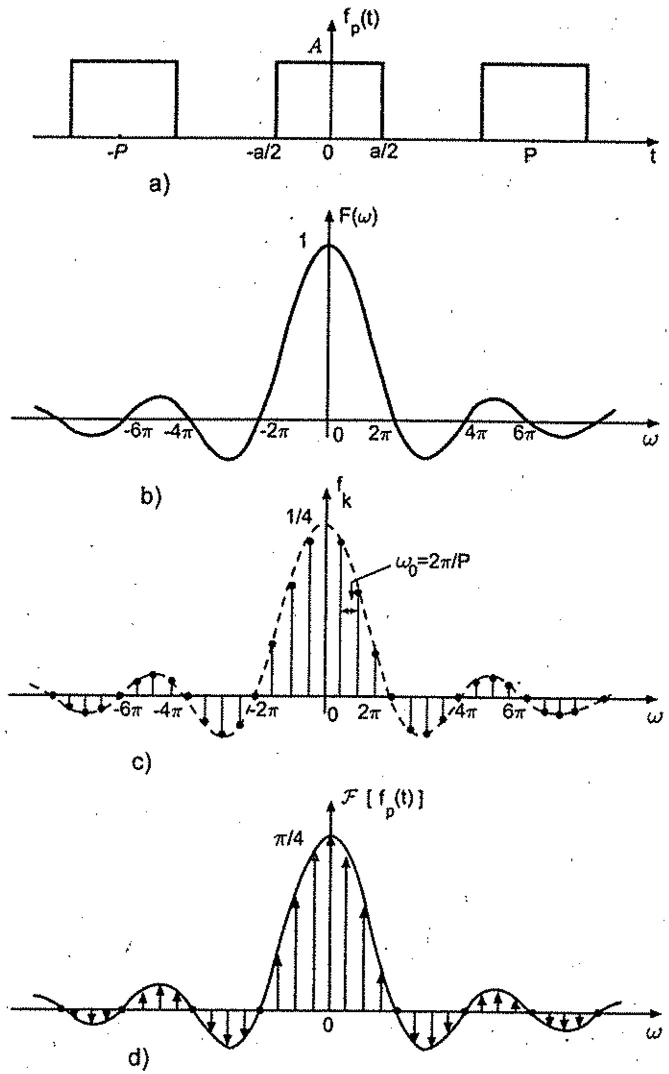
$$|f_k| = \frac{Aa}{P}\left|\frac{\sin(k\pi a/P)}{k\pi a/P}\right| \tag{6.18}$$

$A = a = 1$ ve $P = 4$ saniye için f_k'lar Şekil 6.2(c)'de gösterilmektedir. $f_p(t)$'nin Fourier integrali Şekil 6.2(d)'de ayrıca görülmektedir.

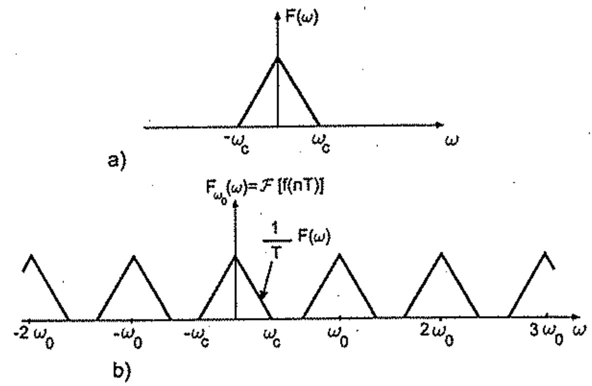
6.4 ZAMAN DOMENİNDE ÖRNEKLEME

Verilen bir $f(t)$ işaretini örnekleme işlemi, $f(t)$ ve periyodu T olan bir impuls dizisinin çarpımı ile ifade edilir. T periyotlu impuls dizisi

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \tag{6.19}$$



Şekil 6.2 Periyodik kare dalga işaretinin Fourier dönüşümünün, kare darbe işaretinin Fourier dönüşümünden, Fourier serisi yardımıyla bulunması: a) Periyodik kare dalga işareti; b) Tek bir kare darbe işaretinin Fourier dönüşümü; c) $A = a = 1$ ve $P = 4$ için kare dalga işaretinin Fourier katsayılarını veren çizgi spektrumu; d) Periyodik işaretin (kare darbelerin) Fourier dönüşümü.



Şekil 6.3 Örtüşmesiz ideal örnekleme; a) Sınırlı bantlı bir $f(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü; b) $T < \pi/\omega_c$ için örneklenmiş $f(nT)$ işaretinin Fourier dönüşümü ($\omega_0 = 2\pi/T$).

olduğuna göre, $f(t)$'nin (6.19) ile çarpımı

$$f(nT) = f(t)\delta_T(t) \tag{6.20}$$

örneklenmiş işareti göstermektedir. Zaman domeninde çarpım frekans domeninde konvolüsyona karşı düştüğünden,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(nT)] &= (1/2\pi)\{F(\omega) * \mathscr{F}[\delta_T(t)]\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{F(\omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - 2\pi n/T)\right\} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega - n2\pi/T)\end{aligned} \tag{6.21}$$

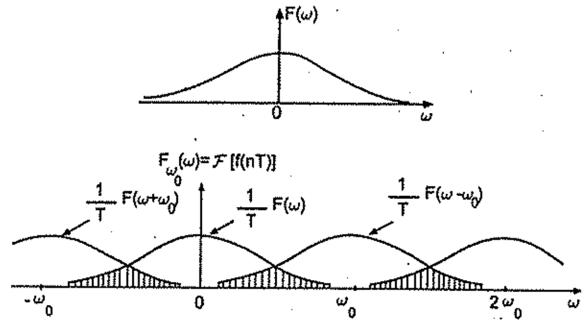
elde edilir.

(6.21)'deki ilişkide örneklenmiş işaretin Fourier dönüşümünün, orijinal $f(t)$ işaretinin Fourier integralinden nasıl bulunacağı görülmektedir. Buna göre, $f(nT)$'nin spektrumu, $F(\omega)$'nın $2\pi/T$'nin tam sayı katları kadar kaydırılmış kopyalarının toplanıp $1/T$ ile çarpımından bulunur. Şekil 6.3'te bu durum görülmektedir.

Açıklama 6.1 $f(t)$'nin frekans spektrumu

$$F(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_c \quad \text{için} \tag{6.22}$$

koşulunu sağlarsa, $f(t)$ işareti ω_c rad/sn'ye bant-sınırlı denir. Şekil 6.3'ten görüldüğü üzere, bant-sınırlı bir işaretin $T < \pi/\omega_c$ aralıklarında örneklenmesi



Şekil 6.4 Sınırlı bantlı olmayan işaretin örneklenmesi ile oluşan örtüşme; a) Sınırlı bantlı olmayan $f(t)$ analog işaretinin spektrumu; b) Herhangi bir örnekleme aralığı $T = 2\pi/\omega_0$ için örneklenmiş $f(nT)$ ayrık-zamanlı işaretinin spektrumu. Taralı alan örtüşen frekans bölümlerini göstermektedir.

durumunda, örneklenmiş işaretin spektrumu birbiri ile çakışmayan (örtüşmeyen) periyodik kopyalardan oluşmaktadır. Bu gözlem, örnekleme teoremi yada Shannon teoreminin ifadesi ve ispatında kullanılacaktır.

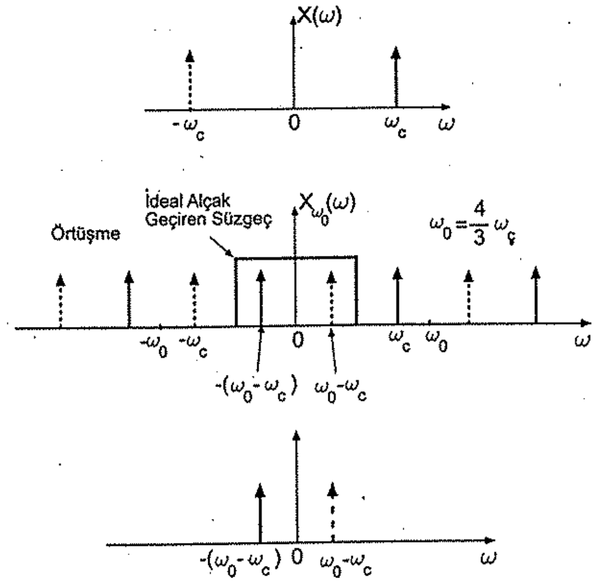
6.5 FREKANS DOMENİNDE ÖRTÜŞME

(6.21)'den, örneklemenin analog işaretin spektrumuna ek olarak bir dizi ikincil spektrum ortaya çıkardığı görülmektedir. Orijinal işaretin elde edilmesi bu ikincil spektrumun uygun bir analog alçak geçiren süzgeç ile ortadan kaldırılmasıyla mümkündür. Analog işaret, (6.22)'de tanımlandığı gibi bant-sınırlı bir işaret değilse, orijinal spektrum ile ikincil spektrum arasında bir çakışma (veya örtüşme) olur. Şekil 6.4'te bu örtüşme görülmektedir.

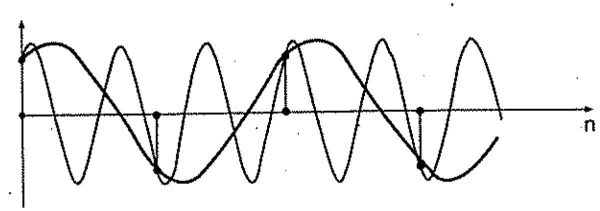
İşaretin bant-sınırlı olmamasından dolayı olan bu örtüşme, analog işaretin örneklenme öncesi bir alçak geçiren süzgeçten geçirilmesi ile önlenir. En büyük frekans bileşeni ω_c olan bant-sınırlı işaret, $T < \pi/\omega_c$ aralıkları ile örneklenirse örtüşmenin olmadığı grafiklerden görülmektedir. Sınırlı bantlı bir işarette örtüşmenin etkisini görebilmek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 6.2 $x(t) = A\cos\omega_c t$, $\omega_c = 2\pi 3000$ rad/sn olan analog işaretin, $T = 1/4000$ saniye aralıklarla örneklenmesi durumunda $x(nT)$'nin frekans spektrumunu inceleyelim.

$T < \pi/\omega_c$ koşulu sağlanmadığından örtüşme olacaktır. Bu durum Şekil 6.5'te görülmektedir. Ayrıca, örneklenmiş ayrık-zamanlı işaretin frekansı $1/2T$" den daha küçük 1000 Hz'lik bir dalga formuna karşı düştüğü hem frekans



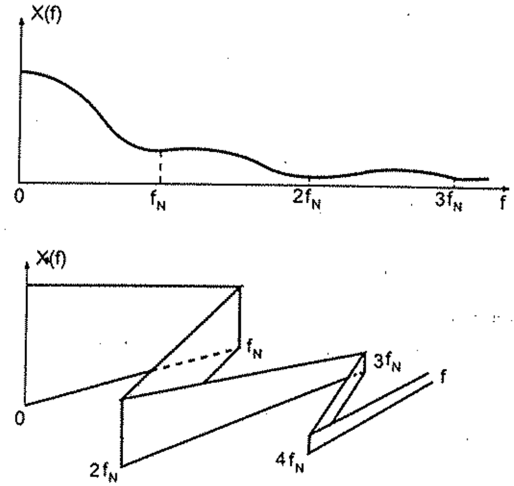
Şekil 6.5 Alçak frekansta örneklemenin frekans domenindeki etkisi; a) Orijinal ω_c frekanslı sinüzoidal işaret; b) $\omega_0 < 2\omega_c$ ile örneklenmiş işaretin spektrumu; c) İdeal alçak geçiren süzgeçten geçen işaretin spektrumu.



Şekil 6.6 Sinüzoidal bir işaretten örnekleme ile daha düşük frekanslı bir sinüzoid elde edilmesi.

domeninde, hem de zaman domeninde görülmektedir.

Gerçekten, $x(nT)$'nin frekans domeninde alt kesim frekansı $1000 + \varepsilon$ Hz olan bir ideal alçak geçiren analog süzgeçten geçirilmesi sonucu $\omega_c' = 2\pi 1000$ rad/sn'lik bir sinüzoid elde edilir. Şekil 6.6'da, zaman domeninde sinüzoidal ayrık-zamanlı işaretten daha düşük frekanslı bir sinüzoidin geçtiği görülmektedir.



Şekil 6.7 Frekans domeninde katlama kavramı; $f_N = f_0/2$. (f_0 =Örnekleme frekansı= $1/T$)

Her iki domende de görülen bu frekans değişiminin nedeni örtüşmedir. Sınırlı bantlı işarette gösterilen bu örtüşme etkisinin sınırlı bantlı olmayan işaretlerde de göstermek mümkündür [3].

Pratikte karşılaşılan pek çok işaret sınırlı bantlı değildir. Örnekleme frekansı ne kadar büyük seçilirse seçilsin yine de örtüşme olacaktır. **Nyquist frekansı** veya katlama frekansı olarak adlandırılan $f_N = 1/2T$ frekans değeri, bu örtüşmenin etkisini belirlemede çok önemlidir. Katlama kavramı Şekil 6.7'de gösterilmiştir. Buna göre, f_N (Nyquist frekansı) üzerindeki frekans bileşenleri katlanarak sıfır ve f_N frekansı arasındaki bileşenlerin üzerine gelmektedir.

Örnek 6.3 $x(t) = e^{-at^2}$, $a = 4 \cdot 10^5$ analog işaretini ele alalım.

a) Bu işaret için Fourier dönüşümünü MATLAB kullanarak çizdiriniz.

b) Zamanda örneklemenin frekans domeninde neden olduğu örtüşme etkisini gözlemlemek için, farklı örnekleme hızlarıyla elde edilen örneklenmiş işaretleri ve Fourier dönüşümlerini gene MATLAB kullanarak çizdiriniz. Örnekleme frekansları I) $f_1 = 1\ kHz$, ve II) $f_2 = 0.75\ kHz$ olarak alınacaktır.

Çözüm.

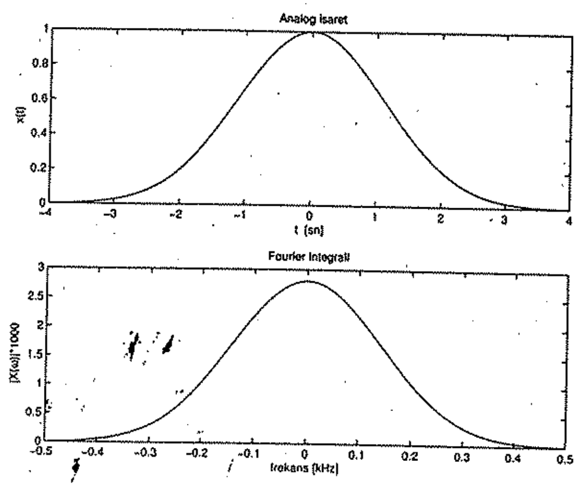
a) Altta verilen MATLAB programı ile $x(t)$ için Fourier integralinin nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir.

```
clear all; close all; % Analog isaret
a=4*10^5; dt = 10^(-4); t_max=4*10^(-3); t = -t_max:dt:t_max;
x=[exp(-a*t.^2)];
% Sürekli-Zaman Fourier Dönüsümü (Fourier integrali)
omega_max = 2*pi*500; K = 1000; k = 0:1:K;
% omega: -omega_max -> omega_max
omega = k*omega_max/K; omega = [-fliplr(omega), omega(2:K+1)];
X=x * exp(-j*t'*omega) * dt; X = abs(X);
subplot(1,1,1)
subplot(2,1,1);plot(t*1000,x);
xlabel('t  [sn]'); ylabel('x(t)'); title('Analog isaret')
subplot(2,1,2);plot(omega/(2*pi*1000),X*1000);
xlabel('frekans [kHz]'); ylabel('|X(\omega)|*1000')
title('Fourier integrali')
```

Analog işaret ve Fourier dönüşümü Şekil 6.8'de görülmektedir. Bu şekilden, $x(t)$ işaretinin frekans domeninde yaklaşık $f_b \approx 0.5\ kHz$ ile bant-sınırlı olduğu görülmektedir. Böylece Nyquist frekansı yaklaşık olarak $f_N = 2 \cdot f_b = 1\ kHz$ olacaktır.

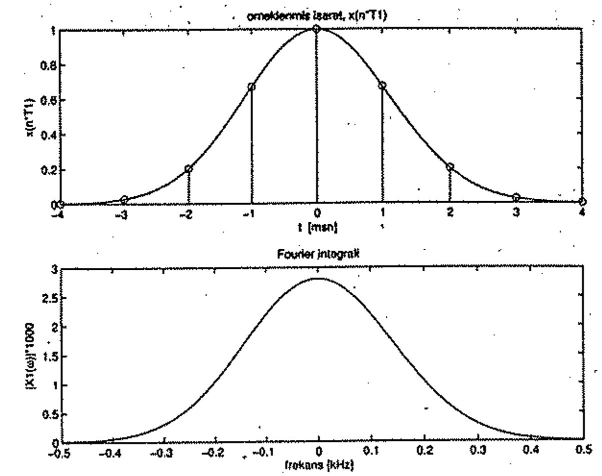
b) Altta verilen MATLAB programında, örneklenmiş işaretlerin ve Fourier dönüşümlerinin nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir. Örneklenmiş işaretler ve karşılık gelen Fourier dönüşümleri, $f_1 = 1\ kHz$ örnekleme frekansı için Şekil 6.9 ve $f_2 = 0.75\ kHz$ örnekleme frekansı için Şekil 6.10'da çizdirilmiştir. Bu şekillerden, Nyquist frekansı $f_1 = 1\ kHz$ ile örneklenen işaret için örtüşme olmadığı görülmektedir. İkinci örneklenmiş işaret için ise örnekleme frekansı Nyquist frekansından küçük olduğu için ($f_2 < f_N$), frekans domeninde örtüşme meydana gelmektedir.

```
clear all; close all; % Analog isaret
a=4*10^5; dt = 10^(-4); t_max=4*10^(-3);
t = -t_max:dt:t_max; x=[exp(-a*t.^2)];
% Orneklenmiş isaret, f1=1 kHz
f1=1000; T1=(1/f1); t1=t(1:T1/dt:end); x1=[exp(-a*t1.^2)];
% Orneklenmiş isaret, f2=0.75 kHz
f2=750; T2=(1/f2); t2=t(1:T2/dt:end); x2=[exp(-a*t2.^2)];
% Sürekli-Zaman Fourier Donüsümü, omega: -omega_max -> omega_max
omega_max = 2*pi*500; K = 1000; k = 0:1:K;
```

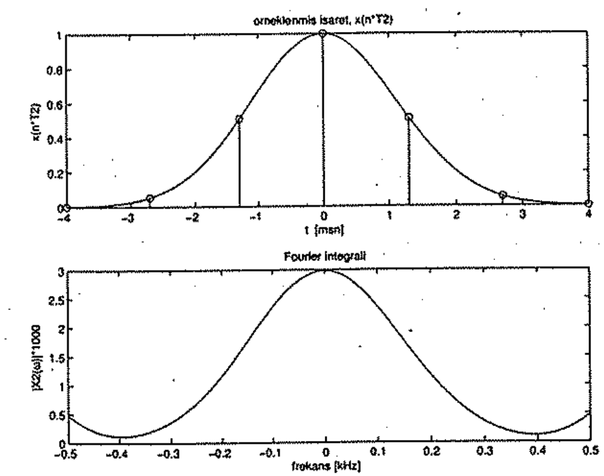


Şekil 6.8 Örnek 6.3 a) için çizdirilen analog işaret ve Fourier integrali.

```
omega = k*omega_max/K; omega = [-fliplr(omega), omega(2:K+1)];
% Örneklenmis isaret x1, f1=1 kHz
X1=x1 * exp(-j*t1'*omega) * dt*10; X1 = abs(X1);
% Örneklenmiş isaret x2, f2=10/14 kHz
X2=x2 * exp(-j*t2'*omega) * dt*14; X2 = abs(X2);
subplot(1,1,1); subplot(2,1,1); plot(t*1000,x);
xlabel('t [msn]'); ylabel('x(n*T1)');
title('orneklenmis isaret, x(n*T1)')
hold on; stem(t1*1000,x1); hold off
subplot(2,1,2);plot(omega/(2*pi*1000),X1*1000);
xlabel('frekans [kHz]'); ylabel('|X1(\omega)|*1000')
title('Fourier integrali')
figure; subplot(1,1,1)
subplot(2,1,1);plot(t*1000,x);
xlabel('t  [msn]'); ylabel('x(n*T2)');
title('orneklenmis isaret, x(n*T2)')
hold on; stem(t2*1000,x2); hold off;
subplot(2,1,2);plot(omega/(2*pi*1000),X2*1000);
xlabel('frekans [kHz]'); ylabel('|X2(\omega)|*1000')
title('Fourier integrali')
```

Şekil 6.9 Örnek 6.3 b) için çizdirilen örneklenmiş işaret ve Fourier integrali, örnekleme frekansı $f_1 = 1\ kHz$.



Şekil 6.10 Örnek 6.3 b) için çizdirilen örneklenmiş işaret ve Fourier integrali, örnekleme frekansı $f_2 = 0.75\ kHz$

□

6.6 SHANNON ÖRNEKLEME TEOREMİ

Analog işaret işleme ile sayısal işaret işleme disiplinleri arasındaki köprü örnekleme teoremidir. Bu önemli özellik sayesinde, analog sistemlerin ve yöntemlerin sayısal olarak gerçekleştirilmesi mümkün olmaktadır.

6.6.1 Örnekleme Teoremi

Bant-sınırlı analog $f(t)$ işareti, ayrık zamanlarda $f(nT)$ şeklinde örneklenmiş değerlerinden yeniden elde edilebilir.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin\{(t-nT)\omega_ö/2\}}{\{(t-nT)\omega_ö/2\}} \tag{6.23}$$

Burada,

$$F(\omega) = 0, \ |\omega| > \omega_0 \text{ için} \tag{6.24}$$

Yani $f(t)$ işareti ω_0 ile bansınırlı olmaktadır. Örnekleme frekansı $\omega_ö$ ise aşağıdaki koşulu sağlamalıdır.

$$\omega_ö = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_0 \tag{6.25}$$

Tanıt. (6.21)'den $\mathscr{F}[f(nT)]$'nin ω değişkenine göre periyodik bir işaret olduğu görülmektedir. O halde, Fourier serisine açılımı yapılabilir.

$$\begin{aligned} F_{\omega_0}(\omega) = \mathscr{F}[(f(nT)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk(2\pi/\omega_ö)\omega} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jkT\omega} \end{aligned} \tag{6.26}$$

Burada, Fourier serisi katsayıları,

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{\omega_ö}\int_{-\omega_ö/2}^{\omega_ö/2} F(\omega)e^{-jk(2\pi/\omega_ö)\omega} \\ &= \frac{T}{2\pi}\int_{-\omega_ö/2}^{\omega_ö/2} F(\omega)e^{-jkT\omega}d\omega \end{aligned} \tag{6.27}$$

ilişkisinden bulunur. (5.47)'deki ters Fourier integralinden,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_ö/2}^{\omega_ö/2} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{6.28}$$

yazılabilir. (6.27)'nin (6.28) ile karşılaştırılmasından

$$F_k = Tf(-kT) \tag{6.29}$$

bulunur. O halde, $F_{\omega_0}(\omega)$'nın Fourier serisi açılımı, (6.29) ve (6.26)'dan

$$F_{\omega_0}(\omega) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(-kT)e^{jkT\omega} = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-jkT\omega} \tag{6.30}$$

olur. (6.20)'daki ifadede, $f(t)$'nin $t = kT$; $k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \ldots$ ayrık anlarındaki değerlerinin, periyodik frekans domeni fonksiyonu $F_{\omega_0}(\omega)$'nın Fourier serisi katsayılarını belirlediği görülmektedir.

$$F(\omega) = F_{\omega_0}(\omega), \quad -\frac{\omega_ö}{2} < \omega < \frac{\omega_ö}{2} \text{ için} \tag{6.31}$$

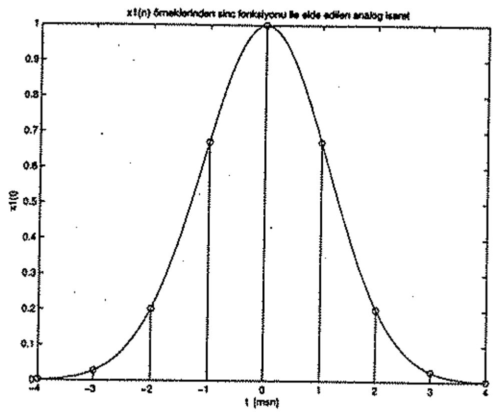
olduğuna dikkat ederek, (6.30) ve (6.28)'den sürekli $f(t)$ işareti yeniden elde edilir.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_ö/2}^{\omega_ö/2} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi}\int_{-\omega_ö/2}^{\omega_ö/2}\left\{\sum_{K=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-jkt\omega}\right\}e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\int_{-\omega_ö/2}^{\omega_ö/2} e^{-j(t-kT)\omega}d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\frac{\sin\{(t-kT)\omega_ö/2\}}{\{(t-kT)\omega_ö/2\}} \end{aligned} \tag{6.32}$$

Bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\mathrm{sinc}[F_ö(t-kT)] \tag{6.33}$$

$\mathrm{sinc}(a)$ fonksiyonu, $\mathrm{sinc}(a) = \dfrac{\sin\pi a}{\pi a}$ olarak tanımlanır. (6.33)'deki interpolasyon denklemine bir kez daha baktığımızda, bunun bir konvolüsyon işlemi olduğunu görebiliriz. $\mathrm{sinc}(F_ö t)$ ideal alçak geçiren bir süzgecin impuls cevabıdır. Böylece, bu interpolasyon işlemi, $f(kT)$ örneklenmiş işaretinin ideal alçak geçiren bir süzgeçten geçirilmesine eşdeğer olmaktadır.



Şekil 6.11 Örnek 6.4 a) için örneklenmiş işaretten elde edilen analog işaret, $f_1 = 1\ kHz$.

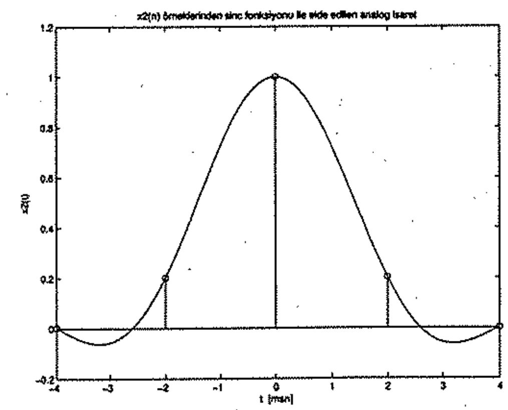
Örnek 6.4 Örnek 6.3'de $x(t) = e^{-at^2}$, $a = 4 \cdot 10^5$ analog işaretinin örneklenmesi ele alınmıştı. Bu işaretin örnek değerlerinden, sinc fonksiyonu ve (6.33) kullanılarak nasıl geri elde edilebileceğini MATLAB yardımıyla gösterelim.

a) Örnekleme frekansı $f_1 = 1\ kHz$

b) Örnekleme frekansı $f_2 = 0.5\ kHz$

Çözüm. Aşağıda verilen MATLAB programı örneklenmiş işaretlerden sinc fonksiyonu yardımıyla analog işaretin nasıl geri elde edilebileceğini göstermektedir. Her iki örnekleme frekansı için elde edilen analog işaretler Şekil 6.11 ve 6.12'de gösterilmektedir. b) şıkkında örnekleme frekansı (6.25)'de verilen koşulu sağlamadığından analog işaretin ancak hatalı olarak elde edildiği görülmektedir.

```
clear all; close all;
a=4*10^5; dt = 10^(-4); t_max=4*10^(-3);
t = -t_max:dt:t_max;
% Orneklenmis isaret, f1=1 kHz
f1=1000; T1=(1/f1);
t1=t(1:T1/dt:end); x1=[exp(-a*t1.^2)];
% analog isaretin yeniden elde edilmesi
x_a1 = x1*sinc(f1*(ones(length(t1),1)*t-t1'*ones(1,length(t))));
plot(t*1000,x_a1);
xlabel('t  [msn]'); ylabel('x1(t)');
```

Şekil 6.12 Örnek 6.4 b) için örneklenmiş işaretten elde edilen analog işaret, $f_2 = 0.5\ kHz$

```
title('x1(n) örneklerinden sinc
fonksiyonu ile elde edilen analog isaret')
hold on; stem(t1*1000,x1); hold off
% Orneklenmis isaret, f2=0.5 kHz
f2=500; T2=(1/f2);
t2=t(1:T2/dt:end); x2=[exp(-a*t2.^2)];
% analog isaretin yeniden elde edilmesi
x_a2 = x2 * sinc(f2*(ones(length(t2),1)*t-t2'*ones(1,length(t))));
figure; plot(t*1000,x_a2);
xlabel('t  [msn]'); ylabel('x2(t)');
title('x2(n) örneklerinden sinc
fonksiyonu ile elde edilen analog isaret')
hold on; stem(t2*1000,x2); hold off
```

□

REFERANSLAR

1. A. Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1977.

2. R.W. Hamming, *Digital Filters* , Dover Publications, 1998.

3. L.B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

4. V. K. Ingle and John G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB*, Brooks Cole, 1999.

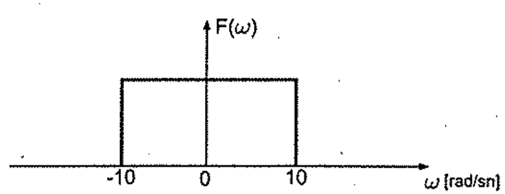
PROBLEMLER

6.1 Sürekli-zamanlı bir işaretin spektrumu Şekil 6.13'te gösterildiğine göre, aşağıdaki örnekleme frekansları için örneklenmiş işaretin spektrumunu bulunuz.

a) $\omega_0 = 30$ rad/sn

b) $\omega_0 = 15$ rad/sn

c) $\omega_0 = 10$ rad/sn



Şekil 6.13

6.2 $x(t) = \sin 2\pi t$ işareti $T = 0.5$ saniye örnekleme aralıkları ile örneklensin. Ayrık-zamanlı $x(nT)$ işaretinden $x(t)$'yi elde etmek mümkün müdür? Bu durum, örnekleme teoremi koşullarını sağlar mı?

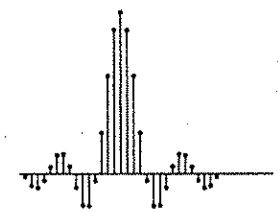
6.3 İnsanlardaki beyin dalgaları 0 Hz ile 45 Hz frekansları arasındadır. Bu işaretleri sayısal olarak işleyebilmek için alınabilecek en büyük örnekleme aralığı nedir?

6.4 $u(t) = \cos 2\pi 10^3 t + 0.5 \cos 2\pi 3 \cdot 10^3 t$ işaretinden saniyede 5000 örnek alınarak elde edilen $x(n)$ örneklenmiş işaretinin, kesim frekansı 2.5 kHz olan bir alçak geçiren süzgeçten geçirilmesi durumunda çıkış nedir?

6.5 $x(t)$ analog işaretinin bant genişliği $f_0 = 5$ Hz olarak verilmektedir. Bu işaret frekansı $\omega_g = 75\pi$ olan sinüzoidal bir gürültü işareti $x_g(t)$ ile bozulmaktadır. Bozulmuş işaret $x_b(t) = x(t) + x_g(t)$, $\omega_ö$ örnekleme frekansı ile örneklenmektedir.
a) $\omega_ö = 50\pi$ için örneklenmiş işaretin frekans spektrumunu çiziniz. $x(t)$ işaretini alçak geçiren süzgeçleme ile elde edebilir miyiz?
b) $\omega_ö = 70\pi$ için örneklenmiş işaretin frekans spektrumunu çiziniz. $x(t)$ işaretini alçak geçiren süzgeçleme ile elde edebilir miyiz?

MATLAB UYGULAMALARI

M6.1 $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a = 1500$ işareti için Fourier integralini MATLAB kullanarak bulunuz. Bu işaret, $f_1 = 5$ kHz ve $f_2 = 2$ kHz örnekleme frekanslarıyla örneklendiğinde elde edilecek örneklenmiş işaretler için Fourier dönüşümlerini çizdiriniz. Örnek 6.3'de kullanılan MATLAB programlarından gerekli değişiklikleri yaparak faydalanabilirsiniz. Sonuçları yorumlayınız.



Bölüm 7

AYRIK-FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

7.1 GİRİŞ

Bölüm 4'te bir $x(n)$ dizisinin Fourier dönüşümünün, z-dönüşümü $X(z)$'nin birim daire üzerindeki $z = e^{j\Omega}$ değerlerinde hesaplanması yöntemiyle bulunacağı belirtilmişti. Ancak, sayısal işaret işlemenin pratik uygulaması, sonsuz bir $x(n)$ dizisinin saklanması ve sürekli Ω frekansının değerlendirilmesi olanaksız olan sayısal donanımlar üzerinde yapılır. Ayrıca, teorik olarak tanımlanan bazı dizilerin aksine, gerçek dizilerin Fourier dönüşümleri hesaplanamaz. Bu nedenle, sayısal işaretler için Fourier dönüşümünün kullanılması uygun değildir. Frekansın analog olarak gösterilmesi ve sonsuz sayıda örneğin gerekmesi, bu uygunsuzluğun temel nedenleridir.

Bu güçlüklerden dolayı, Fourier dönüşümünün işaret işlemedeki önemi dikkate alındığında daha pratik bir dönüşüm tanımlamak gerekmektedir. Birim daire etrafında düzgün aralıklı N frekans noktası (Ω_k) ve $x(n)$ dizisinin N örneği için tanımlanan bu yeni dönüşüm, Ayrık-Fourier dönüşümü (AFD) olarak adlandırılır. Tersi de alınabilen bu dönüşümün önemli özellikleri vardır. En önemlisi, iki AFD'nin çarpımının zaman domeninde karşılığının dizilerin konvolüsyon toplamı olmasıdır. Ayrıca, birçok spektrum analiz yöntemi AFD'ye dayanmaktadır [1-3].

Bu bölümde, AFD'nin Fourier dönüşümünden elde edilmesi için yapılması gereken değişiklikler tartışılacaktır. Önceki bölümde, bir sayısal işaretin tam olarak belirlenebilmesi için Fourier dönüşümünden alınması gereken frekans domeni örneklerine ilişkin koşullar ayrıntılı olarak tartışılmıştır. Buradan elde edilen koşulların ışığı altında, periyodik ve gerçel işaretlerin Fourier dönüşümü ile AFD arasındaki ilişki açıklığa kavuşturulacaktır.

7.2 AYRIK-FOURİER DÖNÜŞÜMÜNÜN TANIMI

Ayrık-Fourier dönüşümünü (AFD), Fourier serisi, Fourier dönüşümü veya dik fonksiyon açılımından yararlanarak tanımlamak mümkündür. Gerçekten de AFD işlemi, verilen sonlu uzunlukta bir sayısal işaretin periyodik yapıldıktan sonra Fourier serisi katsayılarının bulunmasıyla gerçekleştirilebilir. Ayrıca, tüm n değerleri için verilen bir $x(n)$ dizisinin Fourier dönüşüm ifadesinde sadece N örneğinin alınmasıyla da AFD bulunabilir. Diğer taraftan, dik fonksiyonlar kullanılarak, AFD dik fonksiyon açılımı biçiminde de tanımlanabilir. Bundan sonraki alt bölümlerde AFD nin tanımlanmasına ilişkin yöntemler tartışılacaktır.

7.2.1 Periyodik İşaretlerin Örneklenmesi

Şekil 7.1'in sol sütununda, verilen bir $x(t)$ işaretinin önce örneklenip sonra periyodik duruma getirilmesi gösterilmektedir. Zaman dönemindeki bu operasyonların frekans domeni karşılıkları, Şekil 7.1'in sağ sütununda görülmektedir. Periyodik sayısal işaretin Fourier dönüşümü AFD olarak tanımlanır.

$(0, NT)$ aralığında örneklenmiş $x(nT) = x(t)\delta_T(t)$ dizisinin Fourier serisi katsayılarını x_k olarak verelim. (5.41)'den x_k şu şekilde elde edilir.

$$x_k = \frac{1}{NT}\int_0^{NT} x(t)\delta_T(t)e^{-jk(2\pi/NT)t}dt \tag{7.1}$$

T örnekleme aralığı ve N örnek sayısı olduğuna göre

$$\int_0^{NT} x(t)\delta_T(t)dt = T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \tag{7.2}$$

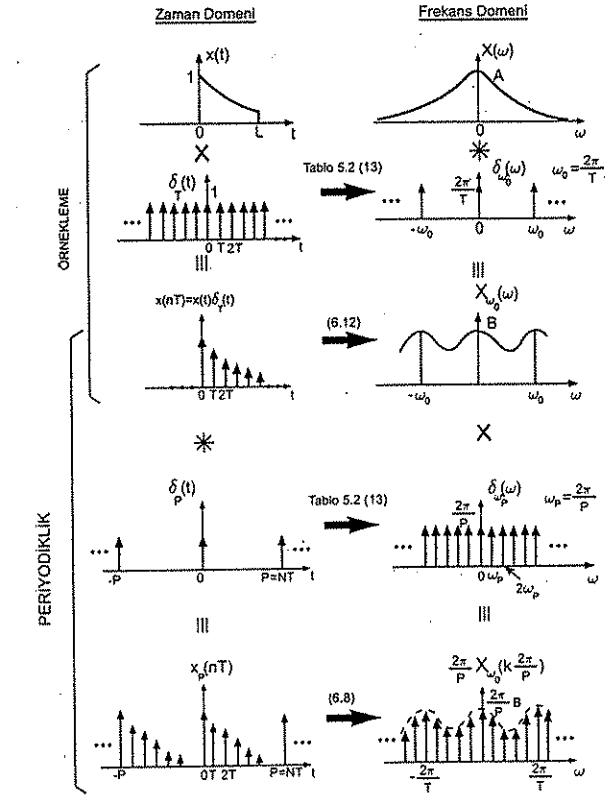
eşitliğinden yararlanarak (7.1) şöyle yazılabilir:

$$x_k \cong \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{7.3}$$

Fourier katsayısını ifade eden (7.3)'deki bu sonuç, Fourier serisini ifade eden

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{jk(2\pi/P)t} \tag{7.4a}$$

$$x_k = \frac{1}{P}\int_0^{P} x(t)e^{-jk(2\pi/P)t}dt \tag{7.4b}$$



Şekil 7.1 Ayrık-Fourier dönüşümünün grafiksel gösterilimi.

denklem çiftinden de elde edilebilir. Gerçekten, $dt = T$ ve $P = NT$ alınarak, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ için $t = nT$ kullanılırsa, (7.4b) denklemi $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ için

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{7.5}$$

olur. (7.5) ile (7.3) özdeştir. O halde X_k, Fourier serisi katsayısı x_k'nın yaklaşığıdır. Yani,

$$X_k \approx x_k$$

olur. Buradaki X_k'lar AFD değerleridir. Eğer mümkünse, her dönüşümün tersinin alınabilmesi istenir. Yani, X_k değerleri verildiğinde $x(n)$ dizisi bulunabilmelidir. Burada, N adet $x(n)$ örneği N adet X_k değerini ürettiği için, AFD'nin tersinin de olmasını beklemek normaldir. Gerçekten, ters ayrık-Fourier dönüşümü vardır. $N = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ için ters AFD şöyle tanımlanır:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk(2\pi/N)n} \tag{7.6}$$

(7.6)'daki ifadenin sağlaması, (7.5) denkleminde yerine konularak gerçekleştirilebilir. (7.5) ve (7.6) ifadeleri ayrık-Fourier dönüşümü (AFD) çifti olarak adlandırılır.

Açıklama 7.1 Literatürde (7.5)'deki $1/N$ terimi, (7.6) ifadesinde toplamın önünde kullanılmaktadır. O halde AFD ikilisi şu biçimde yazılabilir.

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk(2\pi/N)n}} \tag{7.7a}$$

$$\boxed{X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n}} \tag{7.7b}$$

Ayrıca literatürde bazen X_k'nın pozitif üstel fonksiyon ve buna karşı düşen $x(n)$'nin de negatif üstel fonksiyon yardımıyla tanımlandığı görülmektedir. $1/N$ terimi yine denklemlerden herhangi biriyle birlikte kullanılabilir.

7.2.2 Dik Fonksiyon Açılımı

AFD, direkt olarak dik fonksiyon açılımı olarak da tanımlanabilir. $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, ..., $x(N-1)$ olarak verilen N noktalı karmaşık sayı dizisi, dik açılım yardımıyla şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{-nk} \\ &= \frac{1}{N}\left[X_0 + X_1 W_N^{-n} + \ldots + X_p W_N^{-pn} + \ldots + X_{N-1} W_N^{-(N-1)n}\right] \end{aligned} \tag{7.8}$$

Burada,

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \tag{7.9}$$

olarak tanımlanmaktadır. (7.8) denkleminde kullanılan dik fonksiyonların $\Phi_k(n) = W_N^{nk}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ olduğu görülmektedir. Gerçekten dik fonksiyon tanımından

$$\begin{aligned} <\Phi_k(n), \Phi_p(n)> &= \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(k-p)} \\ &= \frac{1 - W_N^{(k-p)N}}{1 - W_N^{(k-p)}} = \begin{cases} N & p = k \quad \text{için} \\ 0 & p \neq k \quad \text{için} \end{cases} \end{aligned} \tag{7.10}$$

bulunabilir. AFD katsayıları olan X_k'ların elde edilmesi için (7.8)'in her iki yanı W_N^{nk} ile çarpılıp n değişkenine göre toplamı alınır.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{p=0}^{N-1} X_p W_N^{-pn}\right] W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1} X_p \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(k-p)n} \end{aligned} \tag{7.11}$$

(7.10)'daki diklik koşulu kullanılarak (7.11)'in sağ tarafı X_k olur.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \tag{7.12}$$

Benzer biçimde X_k kümesinin de $x(n)$ değerlerini vereceği gösterilebilir. Yani,

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{-nk} \tag{7.13}$$

olarak bulunur. (7.12) ve (7.13)'deki X_k ve $x(n)$'nin ortak özelliği periyodik olmalarıdır.

$$X_{k+N} = X_k \tag{7.14}$$

$$x(n+N) = x(n) \tag{7.15}$$

Açıklama 7.2 Bölüm 6'da, analog bir $x(t)$ işaretinin örneklenmesinin bu işaretin Fourier dönüşümünü periyodik duruma getirdiğini gördük. Zaman ve frekans domenlerindeki dualite nedeniyle, Fourier dönüşümü $X(\omega)$'nın örneklenmesi de, (7.15)'de gösterilen sayısal işaretin periyodik olmasını sağlar. Analog ve sayısal işaretlerin Fourier dönüşümü arasındaki temel farklılık böylece belirlenmiş olmaktadır. Bu gerçeğin unutulması önemli hatalara yol açabilir.

Örnek 7.1 Aşağıdaki ayrık-zamanlı $x(n)$ dizisi için AFD hesaplayalım.

$$x(n) = \begin{cases} e^{-an} & ; \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1 \text{ için} \\ 0 & ; \quad n < 0 \text{ ve } n \geqslant N \text{ için} \end{cases} \tag{7.16}$$

$k = 0,1,2,...,N-1$ için AFD katsayıları

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-an} W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-an} e^{-j(2\pi/N)nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-(a+j(2\pi k/N))n} \end{aligned} \tag{7.17}$$

olarak bulunur. Öte yandan,

$$\sum_{n=0}^{N-1} y^n = \frac{1-y^N}{1-y} \tag{7.18}$$

ve

$$e^{-(a+j(2\pi k/N))N} = e^{-aN} e^{j2\pi k} = e^{-aN} \tag{7.19}$$

özellikleri kullanarak X_k şöyle yazılabilir.

$$X_k = \frac{1-e^{-aN}}{1-e^{-a}e^{-j(2\pi k/N)}} \tag{7.20}$$

Örnek 7.2 $P = 10$ ve $a = 5$ için Şekil 7.2'deki kare dalgayı ele alalım.

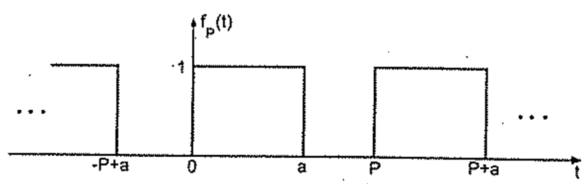
(a) Bunun Fourier serisi katsayılarını f_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ için bulalım.

(b) Yalnızca bir kare dalga darbesi için Fourier dönüşümü $F(\omega)$'yı belirleyelim.

(c) Fourier integralinden Fourier katsayılarını elde edelim

(d) $N = 10$ için işaretin AFD değerlerini hesaplayalım.

(e) Tüm sayısal değerleri tablo halinde karşılaştıralım.



Şekil 7.2 Kare dalga.

Çözüm. a) Şekil 7.2'deki $f_P(t)$ işareti ile Fourier serisi katsayıları f_k arasında

$$f_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{jk\omega_0 t} \tag{7.21}$$

$$f_k = \frac{1}{P}\int_0^P f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \tag{7.22}$$

ilişkileri bilinmektedir. (7.21) ve (7.22) ifadelerinde $\omega_0 = 2\pi/P$ dir. O halde (7.22)'deki integral Şekil 7.2'deki kare dalga için şöyle hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{P}\int_0^a e^{-jk(2\pi/P)t} dt \\ &= \frac{1}{P}\frac{e^{-jk(2\pi/P)t}}{-jk(2\pi/P)}\Big|_0^a \\ &= \frac{1}{P}\frac{e^{-jk(2\pi/P)a}-1}{-jk(2\pi/P)} \\ &= \frac{1}{P}e^{-jk(\pi/P)a}\frac{e^{-jk(\pi/P)a}-e^{+jk(\pi/P)a}}{-jk(2\pi/P)} \\ &= \frac{1}{P}e^{-jk(\pi/P)a}\frac{\sin k(\pi/P)a}{k(\pi/P)} \\ &= \frac{\sin k(\pi/P)a}{k\pi}e^{-jk(\pi/P)a} \end{aligned} \tag{7.23}$$

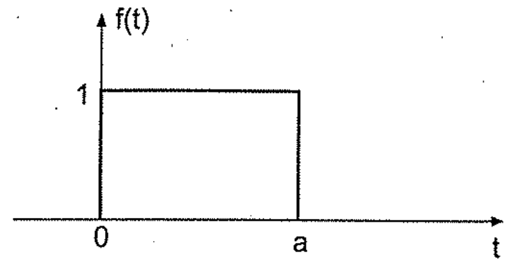
$P = 10$ ve $a = P/2$ için,

$$|f_k| = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}, k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots \tag{7.24}$$

olarak bulunur.

b) Şekil 7.3'te görülen yalnızca bir tek kare darbenin Fourier integrali (dönüşümü) aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_0^a e^{-j\omega}dt \\ &= \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_0^a = \frac{e^{-j\omega a}-1}{-j\omega} \end{aligned} \tag{7.25}$$



Şekil 7.3 Kare darbe işareti.

$$= e^{-j(\omega a/2)}\frac{2\sin\left(\omega\frac{a}{2}\right)}{\omega} = e^{-j(\omega a/2)}\frac{\sin\left(\omega\frac{a}{2}\right)}{\omega/2} \tag{7.26}$$

$a = P/2 = 10/2 = 5$ için $F(\omega)$'nın genliği

$$|F(\omega)| = \frac{\sin\left(\omega\frac{5}{2}\right)}{\omega/2} \tag{7.27}$$

olarak bulunur.

c) Bölüm 5'ten, Fourier katsayıları f_k ile Fourier integrali $F(\omega)$ arasındaki ilişkinin

$$f_k = \frac{1}{P}F(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0} \tag{7.28}$$

olduğu bilinmektedir. $\omega_0 = 2\pi/P = 2\pi/10 = \pi/5$, (7.28)'de yerine konulursa,

$$f_k = \frac{1}{10}F\left(k\frac{\pi}{5}\right) \tag{7.29}$$

bulunur. Gerçekten, (a) ve (b) bölümlerindeki (7.25) ve (7.27)'den,

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}F\left(k\frac{\pi}{5}\right) &= \frac{1}{10}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{5}\frac{5}{2}\right)}{k\frac{\pi}{5}\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi} = |f_k|\end{aligned} \tag{7.30}$$

d) $N = 10$, $T = 1$, $P = 10$ ve $a = 5$ için, (7.12)'deki AFD denkleminden F_0, F_1, ... F_9 değerleri hesaplanabilir.

$$F_k = \sum_{n=0}^{9} f(nT)e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{7.31}$$

Burada örneklenmiş işaret değerleri

$$f(nT) = \{1,1,1,1,1,0,0,0,0,0\}$$

olarak yerine konulursa,

$$\begin{aligned}F_k &= \sum_{n=0}^{4} e^{-jk(2\pi/10)n} = \frac{1-e^{-jk\pi}}{1-e^{-jk(\pi/5)}} \\ &= \frac{e^{-jk(\pi/2)}\left[e^{jk(\pi/2)} - e^{-jk(\pi/2)}\right]}{e^{-jk(\pi/10)}\left[e^{jk(\pi/10)} - e^{-jk(\pi/10)}\right]} = e^{-jk(2\pi/5)}\frac{\sin k(\pi/2)}{\sin k(\pi/10)}\end{aligned} \tag{7.32}$$

(7.32)'den F_k'nın genliği

$$|F_k| = \frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/10)} \tag{7.33}$$

olarak bulunur. Ayrıca $\sin(k\pi/10) \approx k\pi/10$ olarak kabul edilirse,

$$|F_k| \cong 10\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi};\ k = 0,1,2,3,4 \text{ için} \tag{7.34}$$

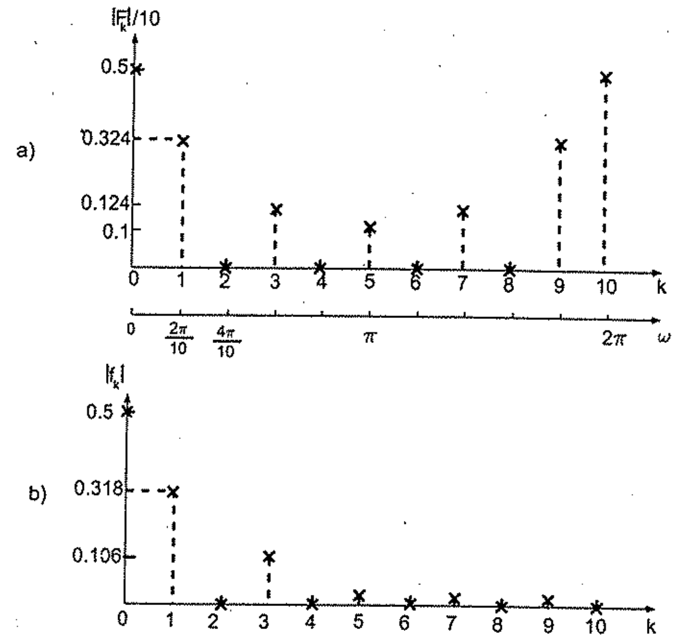
e) Şimdi, ayrık-Fourier dönüşümü (AFD) değerleri ile Fourier serisi katsayılarını karşılaştırabiliriz. Şekil 7.4'te $|F_k|/10$ ile $|f_k|$ değerlerinin karşılaştırılması görülmektedir. Özetle,

$$|F_k| = \frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/10)} \tag{7.35}$$

$$|f_k| = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \tag{7.36}$$

bağıntılarından yararlanarak aşağıdaki değerler elde edilir.

k	$\|F_k\|$	$\|F_k/10\|$	$\|f_k\|$
0	5	0.5	0.5
1	3.24	0.324	0.318
2	0	0	0
3	1.24	0.124	0.106
4	0		0
5	1.0	0.1	0
6	0	0	0.064
7	1.24	0.124	0.045
8	0	0	0
9	3.24	0.324	0.035



Şekil 7.4 Grafiksel gösterilimler; a) AFD değerleri; b) Fourier serisi katsayıları.

□

Açıklama 7.3 Yukarıdaki sayısal değerlerin incelenmesinden, $k = 0,1,2,3,4$ için $|F_k|/10$ ile $|f_k|$ değerlerinin birbirine yaklaşık olarak eşit olduğu görülmektedir. $k = 5,6,7,8,9$ için herhangi bir benzerlik sözkonusu değildir. $k \geqslant 5$ için Fourier katsayısı $|f_k|$'lar sürekli olarak azalırken, AFD değerleri olan $|F_k|$'lar simetrik olarak değişmektedir. AFD'nin simetri özelliği olan bu durum ayrıca incelenecektir.

7.3 AFD TEMEL ÖZELLİKLERİ

AFD'nin etkin ve yararlı kullanılabilmesi için, bazı temel özelliklerinin bilinmesi gerekmektedir. Bu bölümde, AFD'nin sayısal işaret işleme açısından önemli olan özellikleri üzerinde durulacaktır.

Burada tartışılacak özelliklerin büyük bir bölümü z-dönüşümünün özel-

liklerine benzer. Gerçekten AFD birim daire üzerinde z-dönüşümünün örneklenmesi ile elde edilmektedir. Bu nedenle, ispat açık olduğu zaman verilmeyecektir.

7.3.1 Doğrusallık Özelliği

AFD doğrusal bir dönüşümdür. Eğer X_k ve Y_k sonlu uzunluktaki $x(n)$ ve $y(n)$ işaretlerinin AFD ise,

$$z(n) = ax(n) + by(n) \qquad (7.37)$$

işaretinin AFD şöyle bulunur:

$$Z_k = aX_k + bY_k \qquad (7.38)$$

$x(n)$ ve $y(n)$'nın uzunlukları sırasıyla N_1 ve N_2 ise, $z(n)$ işaretinin uzunluğu

$$N = \max(N_1, N_2) \qquad (7.39)$$

olarak verilir. Örneğin $N_1 > N_2$ ise iki AFD $N = N_1$ için hesaplanır. $y(n)$ işaretine $N_1 - N_2$ kadar sıfır ilavesi ile elde edilecek işaretin AFD Y_k'dır. Aynı periyotlu ($N = N_1 = N_2$) periyodik işaretler için de (7.37) ve (7.38) denklemleri geçerlidir. Ancak, periyodik işaretler için sıfır ilavesi yöntemi uygulanamaz.

7.3.2 Simetri Özellikleri

Gerçel değerlerden oluşan periyodik bir diziye karşı düşen AFD değerleri karmaşık ve periyodiktir. Yani,

$$\{x(n)\} = \{x(0), x(1), \ldots, x(N-1)\} \qquad (7.40)$$

gerçel değerlerle gösterilen periyodik dizinin periyodu N ise

$$x(n + N) = x(n) \qquad (7.41)$$

olur. (7.40) noktalarından elde edilecek AFD değerleri

$$\{X_k\} = \{X_0, X_1 \ldots, X_{N-1}\} \qquad (7.42)$$

karmaşıktır ve periyodiktir.

$$X_{k+N} = X_k \qquad (7.43)$$

$x(n)$ işaretinin gerçel olması durumunda (7.42)'deki AFD değerleri ayrıca simetri özelliklerine sahip olur. Bu simetri özellikleri yardımıyla, X_k katsayılarının sadece yarısının hesaplanması yeterli olacaktır. Gerçel $x(n)$ için bu önemli simetri şöyle bulunabilir:

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk(2\pi/N)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\{\cos[k(2\pi/N)n] - j\sin[k(2\pi/N)n]\} \end{aligned} \tag{7.44}$$

(7.44)'den X_k'nın gerçel bölümünü

$$Re[X_k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos[k(2\pi/N)n] \tag{7.45}$$

olarak gösterelim. N sayısını çift varsayarak,

a) $k = N/2$ için

$$Re[X_k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos n\pi = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x(n) \tag{7.46}$$

bulunur.

b) $k = (N/2) - m$ için

$$\cos\left[\left(\frac{N}{2} - m\right)\frac{2\pi}{N}n\right] = \cos\left[\left(\frac{N}{2} + m\right)\frac{2\pi}{N}n\right] \tag{7.47}$$

yazılabilir. O halde, $m = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1$ için

$$Re[X_{(N/2)-m}] = Re[X_{(N/2)+m}] \tag{7.48}$$

olacaktır.

(7.48) ifadesinden X_k'nın gerçel bölümünün $k = N/2$ etrafında simetrik olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca X_k'nın sanal kısmının $k = N/2$'ye göre ters simetrik olduğu gösterilebilir.

$$Im[X_{(N/2)-m}] = -Im[X_{(N/2)+m}] \tag{7.49}$$

(7.48) ve (7.49) özelliklerinden

$$X_{(N/2)+m} = X^*_{(N/2)-m}; \quad m = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1 \text{ için} \tag{7.50}$$

ve

$$|X_{(N/2)+m}| = |X_{(N/2)-m}| \tag{7.51}$$

yazılabilir.

(7.51), $\{x(0), x(1), \ldots, x(N-1)\}$ dizisinde bulunan spektral enformasyonun tamamının ilk $N/2$ AFD katsayısında bulunduğunu göstermektedir. Buna göre, sadece ilk $N/2$ AFD katsayısının hesaplanması yeterlidir.

$N = 8$ için, $(N/2) = 4$

$$X_4 = X_4^*; X_5 = X_3^*; X_6 = X_2^*; X_7 = X_1^*$$

$N = 7$ için benzer şekilde,

$$X_4 = X_3^*; X_5 = X_2^*; X_6 = X_1^*; X_7 = X_0^*$$

olduğu gösterilebilir.

İşaret dizisi $x(n)$'nin karmaşık değerli olması durumunda yukarıdaki simetri özellikleri geçerli değildir.

7.3.3 Zaman ve Frekans Seçiciliğine İlişkin Belirsizlik Prensibi

Ayrık-Fourier dönüşümünün belirsizlik prensibi AFD'nin zaman ve frekans domenindeki kavramlarıyla ilgilidir. Fizikte ki iyi bilinen belirsizlik ilkesiyle eşdeğerdir. Bu kavram fiziksel özelliklerin bir sonucu olmayıp sadece temel bir matematiksel formülasyonun neticesidir.

Periyodu P olan periyodik bir $x(t)$ işaretini T örnekleme aralığı ile örnekleyelim. $x(nT)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ şeklinde bir periyot boyunca örnek noktaları elde edilirken, T zaman domenindeki seçiciliği, $P = NT$ olacak biçimde N AFD uzunluğunu yada örnek noktaların sayısını göstermektedir. Bölüm 6'da tartışıldığı üzere, örneklenmiş periyodik $x(n)$ işaretinin Fourier dönüşümü $X(\omega)$'da ayrık ve periyodiktir. Tanımlı olduğu frekans noktaları $\omega = k\omega_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$'dir. Burada temel frekans olan

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{NT} \tag{7.52}$$

frekans seçiciliği olarak adlandırılır. Frekans domenindeki tekrarlama periyodu AFD analizinde kapsanan frekans aralığına eşittir. Gerçekten, frekans aralığı,

$$N\omega_0 = N\frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{T} \tag{7.53}$$

olarak bulunur. (7.36)'dan

$$\omega_0 T = \frac{2\pi}{N} \tag{7.54}$$

yazılabilir. N örnek sayısını gösterdiğine göre (7.54) belirsizlik prensibini göstermektedir. Daha açık bir yazımla,

(ω_0, frekans seçiciliği)$\cdot$(T, zaman seçiciliği veya örnekleme zamanı)$= 2\pi/N$ olarak verilen bir sabite eşittir. Eğer nokta sayısı sabitse, birinde yapılan iyileştirme diğerinin aleyhine olacaktır.

7.3.4 AFD ile FOURİER DÖNÜŞÜMÜ ARASINDAKİ BAĞLANTI-EŞDEĞERLİK KOŞULLARI

Ayrık-Fourier dönüşümü (AFD) ile sürekli Fourier dönüşümünün yaklaşığı olduğu için ilgilenilmektedir. Bu yaklaşıklığın geçerliliği kesinlikle ilgilenilen dalga biçimine bağlıdır. Bu bölümde, ayrık ve sürekli dönüşümlerin eşdeğerlik derecesini belirlemek için grafiksel analiz yöntemi kullanılacaktır. İki dönüşüm arasındaki farklılıkların temel nedeni, AFD için geçerli olan örnekleme ve kesmedir.

AFD ile Fourier dönüşümünün eşdeğerliği için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır [4]:

1. Zaman fonksiyonu $x(t)$ periyodik olmalıdır.
2. $x(t)$ sınırlı bant genişlikli olmalıdır.
3. Örnekleme hızı, $x(t)$'nin en büyük frekans bileşeninin en az iki katı olmalıdır.
4. Kesme (pencereleme) fonksiyonu $w(t)$, $x(t)$'nin bir periyodunda (veya periyodun tam katlarında) sıfırdan farklı olmalıdır.

Verilen bir $x(t)$ işaretinin Fourier integrali

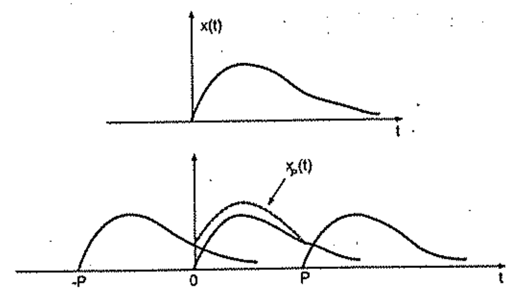
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{7.55}$$

formülü ile bulunur. $x(t)$ periyodik ve periyodu P ise (7.55) integrali $\lambda = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ için bir dizi integralin toplamı formunda yazılabilir.

$$X(\omega) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \int_{\lambda P}^{(\lambda+1)P} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{7.56}$$

$t = \lambda P + \tau; dt = d\tau$ değişken dönüşümü yardımıyla, (7.56) denklemi

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \int_0^P x(\tau+\lambda P)e^{-j\omega\tau}e^{-j\omega\lambda P}d\tau \\ &= \int_0^P \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} x(\tau+\lambda P)e^{-j\omega\tau}e^{-j\omega\lambda P}d\tau \end{aligned} \tag{7.57}$$



Şekil 7.5 $x_p(t)$'nin $0 \leqslant t \leqslant P$ aralığında örtüşmeden dolayı oluşan yeni dalga formu. P periyodu yeterince büyük seçilirse $0 \leqslant t \leqslant P$ için $x_P \cong x(t)$ olacağı görülmektedir.

olur. $\omega = k\omega_0$, $k = 0, \mp1, \mp2, \ldots$ ayrık frekansları (7.57)'deki $X(\omega)$

$$X(k\omega_0) = \int_0^P \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} x(\tau+\lambda P)e^{-jk\omega_0\tau}e^{-jk\omega_0\lambda P}d\tau \tag{7.58}$$

ifadesinden bulunabilir. Ayrıca, $\omega_0 = 2\pi/P$ ise, yukarıdaki denklem,

$$X\left(\frac{2\pi}{P}\right) = \int_0^P \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} x(t+\lambda P)e^{-jk(2\pi/P)\tau}d\tau \tag{7.59}$$

biçiminde sadeleştirilir. P periyotlu $x(t)$ işareti için,

$$x_P(t) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} x(t+\lambda P) \tag{7.60}$$

notasyonu kullanılırsa, (7.59)

$$X\left(k\frac{2\pi}{P}\right) = \int_0^P x_P(t)e^{-jk(2\pi/P)t}dt \tag{7.61}$$

formunda elde edilir.

(7.60), $x(t)$ işaretinin periyodik yada katlanmış uyarlamasıdır. Bu durum Şekil 7.5'te gösterilmiştir. Buradan da anlaşılacağı gibi, P periyodu yeterince büyük tutulursa

$$x_P(t) \cong x(t); \quad 0 \leqslant t \leqslant P \text{ için} \tag{7.62}$$

yazılabilir. (7.62)'deki sonuç (7.61)'de yerine konulursa,

$$X\left(k\frac{2\pi}{P}\right) \cong \int_0^P x(t)e^{-jk(2\pi/P)t}dt \tag{7.63}$$

bulunur. Zaman domeninde $x(t)$ işareti sınırlı ise $P \geqslant 2t_{max}$ için zaman domeni örtüşmesi olmayacaktır. Bu koşul örnekleme teoreminin zaman domeni karşılığıdır. Bununla beraber frekans domeninde $\omega_0 = 2\pi/P$ aralıklarıyla yapılan örneklemenin zaman domeninde oluşturduğu örtüşme ile de ilgilidir. $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü olan $X(\omega)$'nın ayrık frekanslardaki ($\omega = k(2\pi/P)$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$) değerlerinin, $0 \leqslant t \leqslant P$ sınırlı aralığında $x_P(t)e^{-j(2\pi/P)t}$'nin integraliyle elde edileceği (7.61)'den anlaşılmaktadır. $x(t)$ sınırlı bir işaret ve P yeterince büyük seçilirse, $x_P(t)$'nin oluşumunda örtüşme olmayacaktır. O halde, $0 \leqslant t \leqslant P$ aralığında $x_P(t) = x(t)$ olur.

$P = NT$ olacak şekilde $x(t)$ işareti, $t = nT$ ayrık noktalarında N örnek ile tanımlanmış ise, (7.61)'deki integral yaklaşık olarak toplam biçiminde ifade edilebilir. $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ için

$$X\left(k\frac{2\pi}{P}\right) \cong \sum_{n=0}^{N-1} x_P(nT)e^{-jk(2\pi/NT)nT}T \tag{7.64}$$

veya

$$X\left(k\frac{2\pi}{P}\right) \cong T\sum_{n=0}^{N-1} x_P(nT)e^{-jn(2\pi/N)k} \tag{7.65}$$

yazılabilir.

(7.65) ifadesi $x(t)$ işaretinin $\omega = k(2\pi/N)$; $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ ayrık frekans noktalarındaki Fourier integralinin değerlerini yaklaşık olarak vermektedir. Bu değerler $x_P(nT)$ uyarlamasının ayrık-Fourier dönüşümünün (AFD) $T = P/N$ katına eşittir. Ancak, P yeterince büyük seçilirse örtüşme olmayacaktır. Bu durumda

$$x_P(nT) = x(nT); \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \text{ için} \tag{7.66}$$

olacak, ve

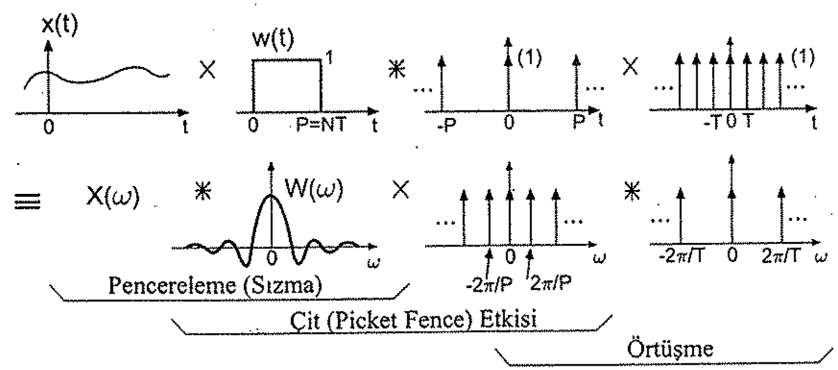
$$\begin{aligned} X\left(k\frac{2\pi}{P}\right) &\cong \frac{P}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jn(2\pi/N)k} \\ &= \frac{P}{N}AFD[x(nT)] \\ &= \frac{P}{N}X_k = TX_k. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Açıklama 7.4 İhmal edilebilir bir örtüşmeyle periyodik duruma getirilen bir işaretin ayrık-Fourier dönüşümü, orijinal dalga formunun $\omega = k\omega_0 = k(2\pi/P) = k(2\pi/NT)$ ayrık frekanslarında ki Fourier integralini $P/N = T$ faktörüyle verir. Burada,

T= örnekleme aralığı
ω_0= frekans aralığı $= 2\pi/P = 2\pi/NT$
NT= zaman domenindeki tekrarlama periyodu $= P$
$N\omega_0$ = Frekans domenindeki tekrarlama periyodu $= 2\pi/T$
olarak tanımlanır.

7.4 AFD İŞLEMİNDEKİ YAKLAŞIKLIKLAR

Verilen bir $x(t)$ işaretinin AFD'sinin bulunmasında kullanılan işlemlerin herbiri yaklaşıklığa neden olmaktadır. Şekil 7.6'da AFD'deki tüm işlem basamakları görülmektedir. Burada görülen işlem sırası değiştirilebilmektedir.



Şekil 7.6 AFD işleminde kullanılan yaklaşıklar.

Örnekleme işleminin etkileri daha önce incelendiği için periyodikliğin ve pencerelemenin etkileri üzerinde ayrıntılı olarak durulacaktır.

7.4.1 Çit (Picket Fence) Etkisi

$x(n)$ işareti ω frekanslı $x(t) = e^{jwt}$ karmaşık fonksiyonun $t = nT$ anlarında örneklenmesiyle elde edilsin. O halde,

$$x(nT) = e^{jwnT}; \omega = 2\pi f \tag{7.68}$$

yazılabilir. AFD ise,

$$
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega nT} e^{-jkn(2\pi/N)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j[\omega T - k(2\pi/N)]n} \qquad (7.69)\\
&= \frac{1 - e^{j2\pi[fT-(k/N)]N}}{1 - e^{j2\pi[fT-(k/N)]}}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Genlik ve faz spektrumu biçiminde gösterilimden yararlanarak,

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k} \qquad (7.70)$$

formunda yazılırsa,

$$|X_k| = \frac{\sin \pi[fT - (k/N)N]}{\sin \pi[(fT - (k/N)]} \qquad (7.71)$$

ve

$$\angle X_k = \pi[fT - (k/N)](N-1) \qquad (7.72)$$

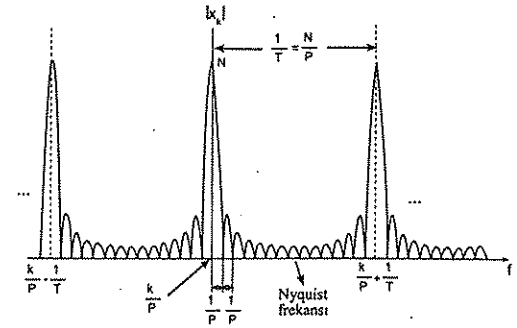
olacaktır. Ayrıca, büyük N değerleri için.

$$\frac{\sin \Phi}{\sin \dfrac{\Phi}{N}} \approx \frac{N \sin \Phi}{\Phi} \qquad (7.73)$$

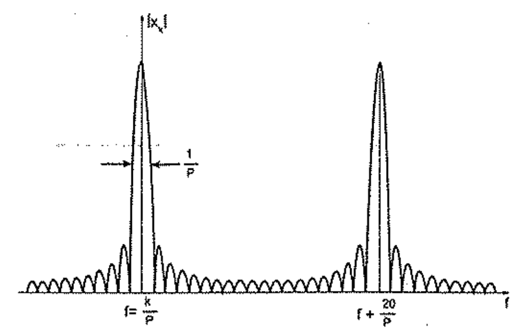
olma özelliğinden yararlanarak (7.71)'deki genlik spektrumu için

$$|X_k| \to \frac{N \sin \pi[fT - (k/N)]}{\pi[fT - (k/N)]} \text{ büyük } N \text{ için} \qquad (7.74)$$

elde edilir. $|X_k|$'nın diyagramı Şekil 7.7'de görülmektedir. Şekil 7.8'de $N = 20$ için $|X_k|$'nın frekansa göre değişimi çizilmiştir. AFD'nin sadece temel lobları gözönüne alınırsa, katsayılar Şekil 7.9(a)'da yaklaşık olarak gösterildiği gibi bir dizi bant geçiren süzgeç olarak düşünülebilir. Bu bant geçiren süzgeçlerin 4 dB veya $2/\pi$ noktalarındaki bant genişliği $1/P$ dir. Burada, $2/\pi = 0.637$ olup, $20\log(0.637) = -3.9$ dur.



Şekil 7.7 Tarama fonksiyonu, T =Örnekleme aralığı; $P = NT$ =kayıt uzunluğu; k = frekans sırası= $0, 1, 2, \ldots, N-1$.

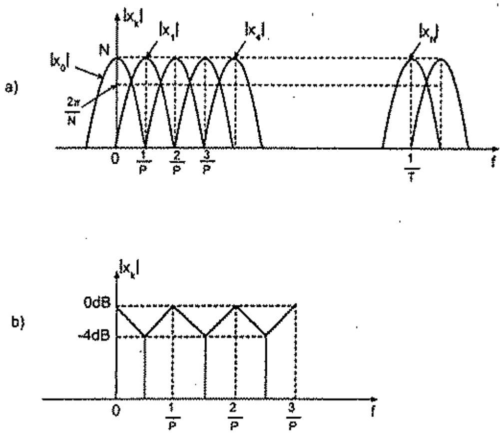


Şekil 7.8 $N = 20$ için $|X_k|$'nın frekansa göre değişimi.

Şekil 7.9(b)'de görüldüğü gibi AFD, işaretin birbiri üzerine örtüşen bant geçiren süzgeçlerden geçirilmesine eşdeğer bir durum yaratmaktadır. Şekil 7.9(b)'deki şekil bir çite benzediğinden bu duruma "picket fence" etkisi denir.

Çit etkisini yok etmenin yollarından biri örneklenmiş işarete sıfırlar ilave yöntemidir. Sıfırlar ilavesiyle N örnek sayısı artacağından , süzgeçler arasındaki $1/P$ aralığı azalır. Böylece orijinal uzatılmış işaretin bileşenleri arasındaki frekans bileşenleri için AFD katsayıları hesaplanmış olur. Bir tür frekans domeni interpolasyonu olan bu işlemle frekans seçiciliği artırılmış olmaktadır. Buradan AFD nin çit etkisine ilişkin iki önemli sonuç ortaya çıkmaktadır.

1. Eğer P sabit tutulursa N'ye bağlı olmaksızın, süzgeçlerin bant genişliklikleri $1/P$ ile sabittir. $1/P$'nin katlarında ortaya çıkan frekans cevabı N'den bağım-



Şekil 7.9 AFD işleminde çit etkisi.

sızdır. Anlamlı olarak kapsanan bant genişliği $N/2P = 1/2T$'den, N'nin artırılması (P sabit olduğunda) bant genişliğini artırmasına rağmen frekans seçiciliğini değiştirmez.

2. Eğer T sabit tutulursa, anlamlı olarak kapsanan bant genişliği $1/2T$'dir. Ayrıca, herhangi bir N değeri için süzgeç bant genişlikleri $1/NT = 1/P$'dir.

O halde, N'nin artırılması (T sabit olduğunda) her bir süzgecin bant genişliğini azaltırken kapsanan bant genişliği sabit kalır. N'nin artırılması frekans bandının tamamen kaplanması için gerekli süzgeç sayısını da artırmaktadır. Eğer N sayısı iki katına çıkarılırsa, süzgeç sayısı iki katına çıkar ve bant genişlikleri yarıya iner.

7.4.2 Pencereleme ve Sızma Etkisi

Sonsuz uzunlukta bir işaret dizisi ile çalışmak imkansız olduğundan tüm işaret analizinde pencereleme kaçınılmazdır. Analiz için işaretin bir bölümü seçilir seçilmez orijinal verinin pencerelendiği söylenebilir. En basit pencereleme tekniğinde verilen işaretin incelenecek bölümü birle, dışarda kalan gözlemı dışı aralık ise sıfırla çarpılır. Örneğin bir sinüs veya kosinüs işaretinin sadece bir bölümünü makasla almak bu türden bir pencereleme işlemidir. Bu işlem sinüs dalgasının sonlu genişlikte birim pencere ile çarpımına eşdeğerdir. Frekans domeninde bu işlemin karşılığı konvolüsyondur. Yani, orijinal işaretin Fourier dönüşümü olan impuls ile pencerenin spektrumunun konvolüsyonu söz konusudur.

Pencerenin Fourier dönüşümündeki yan lobları nedeniyle yan bantlarda bir spektrum "sızıntısı" vardır. Tablo 5.2(7)'de dikdörtgen pencere fonksiyonunun oluşturduğu sızıntı görülmektedir. İdeal olarak, makasla kesme yoluyla gerçekleştirilen dikdörtgen pencere sonsuz genişlikte olursa, spektrum bir impuls biçiminde olacaktır. Bu özel durumda sızıntı etkisi yoktur. Dikdörtgen pencere fonksiyonunun uçlarındaki süreksizliklerin oluşturduğu spektrum dağılımından dolayı, diğer pencere fonksiyonlarını kullanma yoluna gidilir. Pencere fonksiyonları zaman domeninde şekillendirilirken Fourier dönüşümünün frekans domeninde bazı özellikleri sağlaması istenir. Buna göre, pencerenin spektrumu yan loblarda minimum ve esas lobda maksimum enerji taşırken bant genişliği de olabildiğince dar olmalıdır. Literatürde çok sayıda pencere fonksiyonu mevcuttur [1,5]. Bunlara ilişkin zaman ve frekans domeni ifadeleri Tablo 7.1'de gösterilmiştir.

Burada gösterilen pencereler aşağıdaki denklemlerle belirlenir:

1. Dikdörtgen:

$$w_R(k) = \begin{cases} 1; & |k| \leqslant N/2 \text{ için} \\ 0; & \text{diğer} \end{cases}$$

2. Hamming:

$$w_H(k) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos(2\pi k/N) & ; |k| \leqslant N/2 \text{ için} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases}$$

3. Üçgen:

$$w_T(k) = \begin{cases} 1 - (2|k|/N) & ; \text{diğer} \\ 0 & ; |k| \leqslant N/2 \text{ için} \end{cases}$$

4. Blackman:

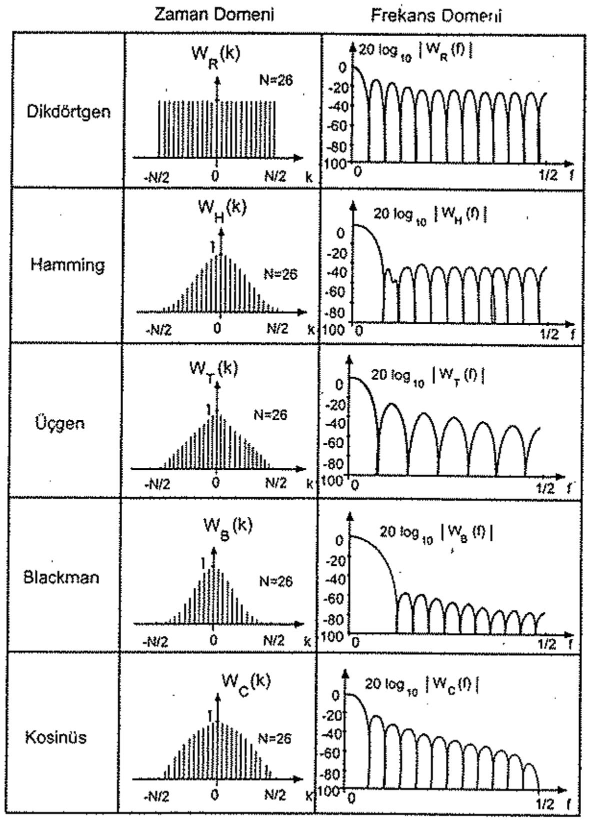
$$w_B(k) = \begin{cases} 0.42 + 0.5\cos(2\pi k/N) + 0.08\cos(4\pi k/N) & ; |k| \leqslant N/2 \text{ için} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases}$$

5. Kosinüs:

$$w_C(k) = \begin{cases} \cos(\pi k/N) & ; |k| \leqslant N/2 \text{ için} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases}$$

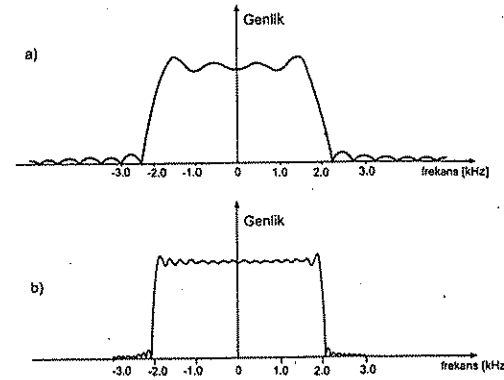
Açıklama 7.5 Pencereleme orijinal işarete uygulanır. Sıfırlarla genişletilmiş diziye uygulanmaz. Hamming penceresiyle çarpılmış bir kare dalganın Fourier serisi yaklaşıklığı Şekil 7.11'de görülmektedir. Bu spektrum Şekil 7.10'da

Tablo 7.1 Pencere fonksiyonları.

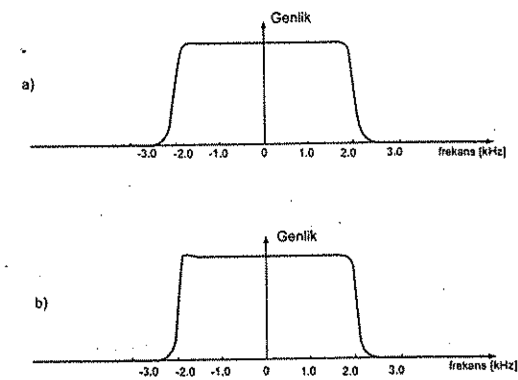


gösterilen pencerelenmemiş Fourier serisi yaklaşıklığı ile karşılaştırıldığında pencerelemenin etkisi açıkça görülmektedir.

Bu örnekte kesim frekansı $f_c = 2.0\ kHz$ olan ideal bir alçak geçiren süzgecin $N = 11$ terimli Fourier serisi yaklaşıklığı Şekil 7.11(a)'da görülmektedir. Gerçekten Hamming penceresinin kullanılması Şekil 7.10(a)'da görülen yan bantları ortadan kaldırmaktadır. Fourier serisi yaklaşıklığında terim sayısı artırıldığında ideale daha yakın sonuç elde edilmektedir. Şekil 7.11(b)'de $N =$ 41 terim için Fourier serisi yaklaşıklığı görülmektedir. Bu yöntem FIR süzgeç tasarım bölümünde ayrıntılı olarak tartışılacaktır.



Şekil 7.10 Pencerelenmemiş bir kare dalganın (ideal alçak geçiren süzgecin) Fourier serisi yaklaşıklığı; a) $N = 11$ terim için; b) $N = 41$ terim için.



Şekil 7.11 Hamming penceresi ile çarpılmış bir kare dalganın (ideal alçak geçiren süzgecin) Fourier serisi yaklaşıklığı; a) $N = 11$ terim için; b) $N = 41$ terim için.

REFERANSLAR

1. A. D. Poularikas, *The Transforms and Applications Handbook*, CRC Press, 2000.
2. D. Sundararajan, *The Discrete Fourier Transform: Theory, Algorithms and Applications*, World Scientific Publications, April 2001.
3. W. L. Briggs and v. E. Henson, *The DFT: An Owner's Manual for the Discrete*

Fourier Transform, Society for Industrial Applied Mathematics, March 1995.

4. R. Tolimieri, M. An, C. Lu and C. S. Burrus, *Algorithms for Discrete Fourier Transform and Convolution*, Springer Verlag, January 1997.

5. V. K. Ingle ve John G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB*, Brooks Cole, 1999.

PROBLEMLER

7.1 {1,1,-1,-1} dizisinin 4-noktalı AFD'sini bulunuz.

7.2 Aşağıdaki dizilerin AFD'lerini bulunuz.

a) $x(n) = \delta(n)$

b) $x(n) = \delta(n - n_0), \quad 0 < n_0 < N$

c) $x(n) = c^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

7.3 Analog bir işaret 10 kHz frekansında örneklenmektedir. Bu işaretin $N = 1024$ örneği için AFD X_k hesaplanmaktadır. X_k ve X_{k-1} katsayıları arasındaki frekans aralığı nedir? Frekans seçiciliği açısından sonucu tartışınız.

7.4

$$F_k = AFD[f(n)], \quad k, n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

ise,

$$AFD\left[f(n)e^{j(2\pi nM/N)}\right] = F_{(M-k)modN}$$

olduğunu gösteriniz.

7.5 Aşağıdaki $x(n)$ dizisinin AFD bulunuz.

$$x(n) = \sin(2n\pi/N); \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

7.6 Karmaşık $x(n)$ dizisinin AFD'sini hesaplayan bir program verilmiş olsun. Bu programı nasıl kullanmalısınız ki ters AFD işlemi aynı program ile hesaplanabilsin (İpucu: Programda değişiklik yapılmayacaktır. Ancak giriş işareti değiştirilebilir).

7.7 $x(n)$ N uzunluklu bir diziyi, X_k ise bu diziye karşılık gelen N-noktalı AFD'yi belirtsin. AFD işlemini $X_k = \mathscr{F}_N\{x(n)\}$ olarak gösterelim. AFD işlemini $x(n)$ dizisine ℓ kez uygulayarak elde edeceğimiz $a(n)$ dizisini bulunuz (ℓ çift bir tamsayı).

$$a(n) = \mathscr{F}_N\{\mathscr{F}_N\{\ldots\mathscr{F}_N\{x(n)\}\}\}$$

7.8 $W_N^{\ell N} = 1$ özelliğini kullanarak AFD'yi konvolüsyon biçiminde ifade ediniz.

7.9

$$w_H(k) = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/N) & ; 0 \leqslant n \leqslant N-1 \text{ için} \\ 0 & ; \text{ diğer} \end{cases}$$

olarak verilen Hamming pencere fonksiyonunun N noktalı AFD'sini bulunuz

7.10 $x(n)$ ve $y(n)$ iki gerçel dizi varsayarak

$$\begin{aligned} AFD[x(n)] &= X_p \\ AFD[y(n)] &= Y_p \\ AFD[x(n) + jy(n)] &= A_p \end{aligned} \tag{7.75}$$

olduğuna göre, A_p'den X_p ve Y_p'nin elde edilebileceğini gösteriniz. O halde, iki gerçel değerli dizinin AFD'lerinin (X_p ve Y_p) belirlenmesi için, sadece bir karmaşık değerli dizinin AFD'sinin (A_p) hesaplanması yeterlidir.

7.11 X_k, $x(n)$ dizisinin AFD'si ise

$$x_c(n) = x(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

$$x_s(n) = x(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

dizilerinin N noktalı AFD'lerini X_k cinsinden bulunuz.

7.12 $x(n)$ N uzunluklu gerçel bir diziyi, X_k ise bu diziye karşılık gelen N-noktalı AFD'yi belirtsin. N çift bir sayı olduğu ve $x(n)$'nin aşağıda verilen simetri koşulunu sağladığı verilsin.

$$x\left(n + \frac{N}{2}\right) = -x(n), \quad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

Bu simetri uyarınca $x(n)$ dizisinin bir yarısı diğer yarısının eksi işaretli simetriği olmaktadır.

a) $x(n)$ dizisinin yanlızca tek harmoniklere sahip bir spektrumu olduğunu, yani

$$X_k = 0, \quad n \text{ çift için}$$

olduğunu gösteriniz.

b) Bu spektrumun sadece $N/2$ tane değeri sıfırdan farklı olmaktadır. Bu değerlerin, $x(n)$'nin karmaşık üstel bir fonksiyonla modülasyonundan elde edilen bir dizinin $N/2$ noktalı AFD'si olarak hesaplanabileceğini gösteriniz.

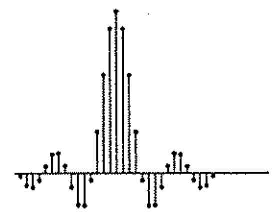
MATLAB UYGULAMALARI

M7.1 $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$, AFD tanımı olarak verilmişti (7.7b).

a) Bu işlemi içiçe geçmiş iki `for` döngüsü kullanarak çözen bir MATLAB fonksiyonu veya m-dosyası yazınız. İç döngü n üzerinden, dış döngü ise k üzerinden indekslenecektir.

b) Tek bir döngü kullanarak k'nın değerlerini tarayan ve her k değeri için bir vektör iç çarpımı gerçekleştirerek AFD hesaplayan bir program yazınız.

c) Tek bir matris çarpımı kullanan bir AFD programı yazınız. MATLAB'in içerdiği `dftmtx` komutunu kullanmayın; kendi AFD matrisinizi yazınız. Bunu örnek olarak, bir `[n=0:(N-1)]` vektörünün, bir `[k=0:(N-1)]` vektörüyle dış çarpımına `exp` komutunu uygulayarak bulabilirsiniz.



Bölüm 8

HIZLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

8.1 GİRİŞ

Ayrık-Fourier dönüşümünün (AFD) doğrudan hesaplanmasında her bir X_k değeri için N karmaşık çarpma ve $N-1$ karmaşık toplama işlemi kullanılmaktadır. Bu nedenle N adet AFD değeri bulunurken, N^2 çarpma ve $N(N-1)$ toplama işlemi gereklidir.

Ayrıca, her karmaşık çarpma işlemi dört gerçel çarpma ve iki gerçel toplama işlemi ve herbir karmaşık toplama iki gerçel toplama işlemi ile gerçeklenmektedir. Sonuç olarak, dizi uzunluğu olan N'nin büyük olması durumunda doğrudan AFD bulunması çok fazla miktarda işlem gerektirmektedir. Yani, N sayısı artarken gereken işlem sayısı yüksek hızla artmaktadır.

AFD hesaplanmasında etkin ve bugün kullanılan yaklaşım, hızlı Fourier dönüşümü (HFD) algoritmalarıdır. HFD terimi bazen karışıklıklara neden olmaktadır. Her ne kadar dönüşüm olarak adlandırılsada, hızlı Fourier dönüşümü (HFD) ayrık-Fourier dönüşümü (AFD)'den farklı değildir. HFD, AFD hesaplanması için etkili, ekonomik bir algoritmadır [1-5].

AFD'nin sayısal işaret işleme alanında spektrum analizi, konvolüsyon ve korelasyon gibi işlemlerin gerçeklenmesinde önemli rol oynaması HFD algoritmalarıdır. Bu bölümde, zamanda desimasyonlu ve frekansta desimasyonlu olmak üzere iki algoritma ayrıntılı olarak incelenecektir.

8.2 MATRİS FORMUNDA AFD GÖSTERİLİMİ

AFD'nin hesabında çok sayıda işlem gerektiğinden, dönüşümün matris biçiminde yeniden düzenlenmesi faydalıdır. Bölüm 7'de AFD detaylı olarak gösterilmiştir.

Buna göre, $\{x(0), x(1), ..., x(N-1)\}$ işaret dizisinin AFD'si

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{8.1}$$

ilişkisinden bulunur. Burada W_N döndürme faktörü olarak adlandırılır ve

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \tag{8.2}$$

olarak tanımlanır.

(8.1) ilişkisine dikkat edilecek olursa N adet katsayının hesaplanmasının gerektiği görülecektir. Bu katsayılar toplu bir şekilde matris formunda gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

(8.3)'deki matrisin elemanları N farklı sayıdan oluşan

$$(1, W_N, W_N^2, \ldots, W_N^{N-1}) \tag{8.4}$$

kümesi yardımı ile basitleştirilebilir.

Gerçekten,

$$W_N^N = e^{-j2\pi} = 1 = W_N^0 \tag{8.5}$$

$$W_N^{k+N} = W_N^k W_N^N = W_N^k \tag{8.6}$$

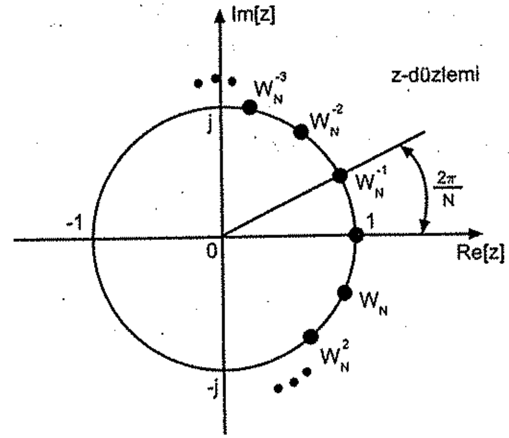
veya

$$W_N^{kn} = W_N^{kn \bmod (N)} \tag{8.7}$$

Ayrıca AFD katsayıları olan W_N^n'lerin karmaşık düzlemdeki yerleri Şekil 8.1'de gösterilmiştir. W_N^n'ler birim daire üzerinde bulunurlar ve $z^N - 1 = 0$ denkleminin kökleridirler. (8.3)'teki kare matris sadece (8.4)'teki N bağımsız sayıdan oluşur. Örneğin $N = 4$ için, (8.3)'ten

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \tag{8.8}$$

elde edilir.



Şekil 8.1 AFD katsayılarının z-düzlemindeki koordinatlarının birim daire üzerinde gösterilimi.

Açıklama 8.1 İşaretin uzunluğu olan N sayısı HFD algoritmalarının verimliliğinde önemli rol oynamaktadır. N'nin ikinin katları olması durumunda algoritmalar basit ve özellikle etkin olmaktadırlar. Bundan dolayı HFD algoritmalarının geliştirilmesinde L bir tam sayı olmak üzere $N = 2^L$ varsayılacaktır.

Açıklama 8.2 AFD'nin (8.3)'deki matris gösteriliminden yararlanarak, ters AFD de matris formunda yazılabilir. Bunun için, (8.3) denklemi

$$\mathbf{X} = [\mathbf{W}_N]\mathbf{x} \tag{8.9}$$

biçiminde yazılır. $\mathbf{x}$ işaret dizisini, $\mathbf{X}$ AFD değerlerini gösteren vektörlerdir. AFD matrisi olarak adlandırılan $[\mathbf{W}_N^{nk}]$ kare matrisinin elemanlarının özelliğinden dolayı tersi kolaylıkla alınabilir. Gerçekten,

$$[\mathbf{W}_N]^{-1} = \frac{1}{N}[\mathbf{W}_N]^* \tag{8.10}$$

olduğu gösterilebilir. (8.9) ilişkilerinden ters AFD ifadesi

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}[\mathbf{W}_N]^*\mathbf{X}$$

olarak bulunur. Bu ifade, Bölüm 7'de tanımlanan

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{-nk} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1 \tag{8.11}$$

ters AFD denklemlerinin matris biçiminde gösterilimidir. (8.11) ifadesinin hesaplanmasında yapılacak olan tartışma hem AFD hem de ters AFD için geçerlidir.

8.3 ZAMANDA DESİMASYONLU HFD

N çift bir tamsayı varsayıldığı için, $x(n)$ dizisi $N/2$ uzunlukta iki diziye ayrılabilir. Bu ayrımda, ilk dizinin elemanları tek sayı indisli, ikinci dizinin elemanları ise çift sayı indisli olarak seçilir. Matematiksel olarak bu ayrım, çift indisliler için $n = 2r$ ve tek indisliler için $n = 2r + 1$ yerine konularak gerçekleştirilir. (8.1) bağıntısında bu ayrım yapılır ise,

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n\ \text{çift}} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n\ \text{tek}} x(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \\ & k = 0,1,2,\ldots,N-1 \end{aligned} \tag{8.12}$$

yazılabilir. $W_N^2 = W_{N/2}$ bağıntısı kullanılarak (8.12) aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk} \\ &= \text{AFD}[N/2 \text{ çift noktalar}] + W_N^k\, \text{AFD}[N/2 \text{ tek noktalar}] \end{aligned} \tag{8.13}$$

Buradan, $N/2$ uzunluğunda iki AFD yardımı ile N uzunluğunda dizinin AFD'sinin hesaplanması görülmektedir. $x(n)$ dizisinin çift ve tek noktalarını

$$\begin{aligned} x^{\varsigma}(n) &= x(2n) \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots,(N/2)-1 \\ x^{t}(n) &= x(2n+1) \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots,(N/2)-1 \end{aligned} \tag{8.14}$$

notasyonu ile tanımlayalım. (8.14)'deki bu tanımlar (8.13)'de yerine konularak

$$X_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{\varsigma}(n)W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{t}(n)W_{N/2}^{nk} \tag{8.15}$$

bulunur. Bu bağıntıdan $X_{k+(N/2)}$ hesaplanacak olursa,

$$X_{k+(N/2)} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{\varsigma}(n)W_{N/2}^{n(k+(N/2))} + W_N^{(k+(N/2))} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{t}(n)W_{N/2}^{n(k+N/2)} \tag{8.16}$$

yazılabilir. Burada,

$$W_{N/2}^{(nN/2)} = \left[e^{-j2\pi/(N/2)}\right]^{(nN/2)} = e^{-j2\pi n} = 1 \tag{8.17}$$

ve

$$W_{N/2}^{(N/2)} = 1 \tag{8.18}$$

özellikleri (8.16)'da kullanılarak,

$$X_{k+(N/2)} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{\varsigma}(n)W_{N/2}^{nk} - W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{t}(n)W_{N/2}^{nk} \tag{8.19}$$

elde edilir. k indeksini $0 \leqslant k \leqslant (N/2)-1$ aralığında sınırlayarak çift ve tek noktaların AFD'leri ayrı ayrı tanımlanabilir.

$$X_k^{\varsigma} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{\varsigma}(n)W_{N/2}^{kn} \tag{8.20}$$

$$X_k^{t} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{t}(n)W_{N/2}^{kn} \tag{8.21}$$

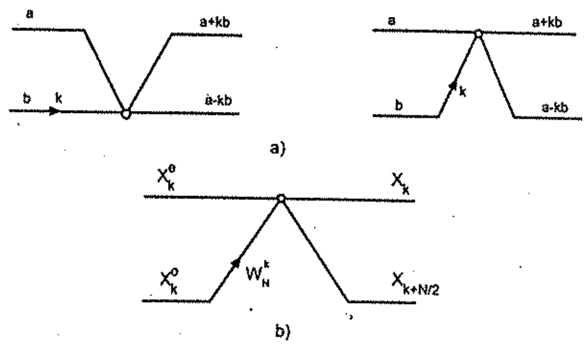
Bu tanımlardan yararlanak (8.15) ve (8.19) bağıntıları tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned} X_k &= X_k^{\varsigma} + W_N^k X_k^t \\ X_{k+(N/2)} &= X_k^{\varsigma} - W_N^k X_k^t \\ k &= 0,1,2,\ldots.(N/2)-1 \end{aligned} \tag{8.22}$$

Şekil 8.2(a)'daki işaret akış diyagramı notasyonuna "kelebek" adı verilmektedir. Bu tanıma göre, (8.22) ifadesi W_N^k döndürme çarpanlı bir kelebek şekli ile gösterilebilir. Şekil 8.2(b)'de kelebek grafik notasyonu görülmektedir.

Açıklama 8.3 (8.22) ifadesindeki kelebek gösteriliminden N noktalı bir AFD'nin tek ve çift noktaların oluşturduğu $N/2$ noktalı iki AFD'den elde edilebileceği görülmektedir. Aynı şekilde, $N/2$ noktalı AFD'ler de yeniden belirlenecek $N/4$ noktalı tek ve çift noktalı dizilerden benzer biçimde elde edilir. $N = 2^L$ varsayıldığında L adım gidilecek olursa, sonuçta sadece 2 noktalı bir dizinin AFD'sinin hesabı yeterli olmaktadır. Örnek 8.1'de bu durum ayrıntılı olarak gösterilmektedir.

Örnek 8.1 Zamanda desimasyonlu HFD algoritmasını açıklayabilmek için sekiz noktalı bir dönüşümü ele alalım. Buna göre $N = 8$, $(N/2) - 1 = 3$ ve $L = 3$ olmaktadır.



Şekil 8.2 Kelebeğin grafiksel notasyonu: a) işaret akış grafiği tanımı; b) W_N^k döndürme çarpanlı kelebek.

(8.22) ifadesinden $W_N^k X_k^t$'nin, $X_k^{\text{ç}}$'ye ilave edilmesi ve çıkarılmasıyla X_k ve $X_{k+(N/2)}$'nin elde edildiği görülmektedir. Bu işlem $k = 0, 1, 2, 3$ için uygulanır. Bu ayrıştırma işlemi $L = 3$ defa tekrarlanarak, 8 noktalı AFD, 2 noktalı AFD'lerin hesabına indirgenir. Bu durum Şekil 8.3'te gösterilmiştir.

Adım 1

$$
\begin{aligned}
X_k &= X_k^{\text{ç}} + W_8 X_k^t \\
X_{k+4} &= X_k^{\text{ç}} - W_8^k X_k^t \\
k &= 0, 1, 2, 3 \\
x^{\text{ç}}(k) &= \{x(0), x(2), x(4), x(6)\} \\
x^t(k) &= \{x(1), x(3), x(5), x(7)\}
\end{aligned}
$$

Adım 2

$$
\begin{aligned}
X_k^{\text{ç}} &= X_k^{\text{çç}} + W_4 X_k^{\text{ç}t} \\
X_{k+2}^{\text{ç}} &= X_k^{\text{çç}} - W_4^k X_k^{\text{ç}t} \\
k &= 0, 1, \\
x^{\text{çç}}(k) &= \{x(0), x(4)\} \\
x^{\text{ç}t}(k) &= \{x(2), x(6)\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
X_k^t &= X_k^{t\text{ç}} + W_4 X_k^{\text{çç}} \\
X_{k+2}^t &= X_k^{t\text{ç}} - W_4^k X_k^{tt} \\
k &= 0, 1, \\
x^{tt}(k) &= \{x(3), x(7)\} \\
x^{t\text{ç}}(k) &= \{x(1), x(5)\}
\end{aligned}
$$

Adım 3

$$
\begin{aligned}
X_k^{\text{çç}} &= x^{\text{çç}}(0) + W_2^k x^{\text{çç}}(1) \\
X_{k+1}^{\text{çç}} &= x^{\text{çç}}(0) - W_2^k x^{\text{çç}}(1) \\
k &= 0,
\end{aligned}
$$

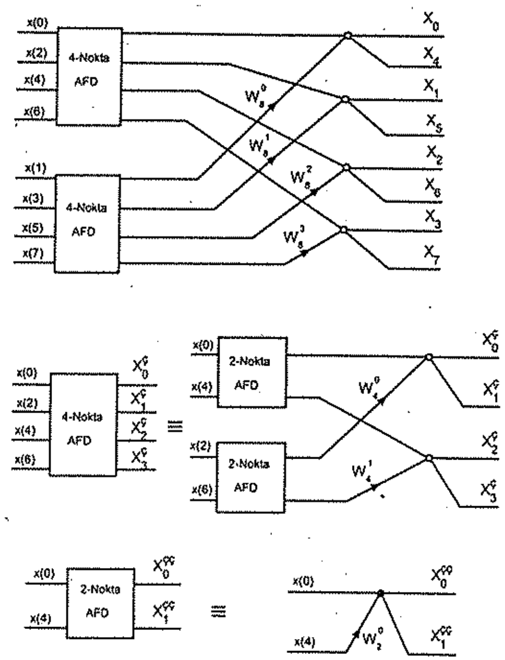
O halde,

$$
\begin{aligned}
X_0^{\text{çç}} &= x(0) + x(4) \\
X_1^{\text{çç}} &= x(0) - x(4)
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer şekilde, X_0^{tt}, X_1^{tt}, $X_0^{t\text{ç}}$, $X_1^{t\text{ç}}$, $X_0^{\text{ç}t}$, $X_1^{\text{ç}t}$ değerleri bulunur. 8 noktalı HFD algoritması Şekil 8.3'te gösterilmiştir.

8.3.1 AFD ile HFD Karşılaştırması

(8.1) bağıntısı ile belirlenen AFD'nin hesaplanmasında N^2 karmaşık çarpımı ve $N(N-1)$ karmaşık toplama gereklidir. Oysa, Bölüm 8.3'te açıklanan HFD algoritması yardımı ile $N = 2^L$ noktadan oluşan bir dizinin ayrık-Fourier dönüşümünün hesabında $NL/2$ karmaşık çarpma ve NL karmaşık toplama işlemi yeterlidir. Adım sayısı $L = \log_2 N$ olarak yazılırsa, işlem yoğunluğu açısından Tablo 8.1'de gösterildiği gibidir. Tablo AFD ile HFD'nin karşılaştırılması incelendiğinde $N = 2^{10} = 1024$ noktalı AFD için yüzde yüzün üzerinde bir kazanç sağlanmaktadır. Başka bir anlatım ile, $N \geqslant 1024$ için HFD dönüşüm algoritmasının gerektirdiği çarpım sayısı doğrudan yöntemin yüzde birinden daha azdır.



Şekil 8.3 $N = 8$ için zamanda desimasyonlu HFD algoritması.

8.4 FREKANSTA DESİMASYONLU HFD

Önceki algoritmada verilen dizi tek sayı ve çift sayı indisli elamanlar olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Aynı işlem tek elamanlı diziler elde edinceye kadar tekrarlanmaktadır. Alternatif bir HFD algoritması diziyi orta noktasından ikiye ayırarak ve aynı işlem elde edilen her diziye uygulanarak geliştirilebilir. Buna göre, verilen $x(n)$ dizisi

$$\begin{aligned} x^{(1)}(n) &= x(n) \\ x^{(2)}(n) &= x(n+N/2) \\ n &= 0,1,2,\ldots,(N/2)-1 \end{aligned} \tag{8.23}$$

Tablo 8.1 Doğrudan Hesaplama ile HFD Algoritmasının Gerektirdiği Kompleks çarpma İşlemleri

Adım Sayısı	Nokta Sayısı	HFD Çarpma Sayısı	Doğrudan Hesaplamadaki Çarpma Sayısı	Oran
L	N	$NL = N\log_2 N$	N^2	$\frac{N^2}{NL}$
1	2	2	4	2
2	4	8	16	2
3	8	24	64	2.7
4	16	64	256	4.0
5	32	160	1024	6.4
6	64	384	4096	10.7
7	128	896	16384	18.3
8	256	2048	65536	32
9	512	4608	262144	56.9
10	1024	10240	1048576	102.4
11	2048	22528	4194304	186.2

biçiminde ikiye ayrılsın. (8.1) ifadesinden

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n+N/2)W_N^{(n+(N/2))k} \end{aligned} \tag{8.24}$$

yazılabilir. (8.23)'deki tanımlar (8.24)'de yerine konulursa

$$X_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(1)}(n)W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(2)}(n)W_N^{(n+(N/2)k} \tag{8.25}$$

elde edilir. Zamanda desimasyona benzer şekilde frekansta desimasyon gerçekleştirilebilir. Yani, çift ve tek frekans domeni noktaları olan X_{2k} ve X_{2k+1},

$k = 0, 1, 2, \ldots, (N/2) - 1$ için (8.25)'den elde edilebilir. k yerine $2k$ konularak,

$$X_{2k} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(1)}(n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(2)}(n) W_N^{(n+(N/2)2k} \tag{8.26}$$

yazılabilir. $W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$ ve $W_N^{kN} = 1$ özelliklerinden ve (8.26)'dan yararlanarak

$$X_{2k} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(1)}(n) W_{N/2}^{nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(2)}(n) W_{N/2}^{nk} \tag{8.27}$$

elde edilir. k yerine $2k+1$ konularak benzer şekilde,

$$\begin{aligned} X_{2k+1} &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(1)}(n) W_N^{n(2k+1)} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(2)}(n) W_N^{(n+(N/2)(2k+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^n x^{(1)}(n) W_{N/2}^{nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^n x^{(2)}(n) W_{N/2}^{nk} W_N^{Nk} W_N^{N/2} \end{aligned} \tag{8.28}$$

bulunur. $W_N^{Nk} = 1$ ve $W_N^{N/2} = -1$ özellikleri (8.28)'de kullanılarak

$$X_{2k+1} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^n x^{(1)} W_{N/2}^{nk} - \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^n x^{(2)}(n) W_{N/2}^{nk} \tag{8.29}$$

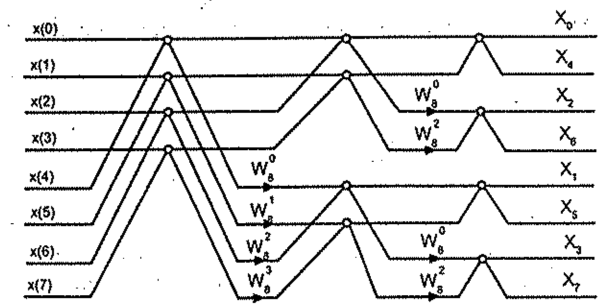
yazılabilir. X_{2k} ve X_{2k+1}'den, $k = 0, 1, 2, \ldots, N/2 - 1$ için

$$\begin{aligned} X_{2k} &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x^{(1)}(n) + X^{(2)}(n)\right] W_{N/2}^{nk} \\ X_{2k+1} &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[X^{(1)}(n) - x^{(2)}(n)\right] W_N^n W_{N/2}^{nk} \end{aligned} \tag{8.30}$$

$N = 8$ için frekansta desimasyonlu HFD algoritması Şekil 8.4'te görülmektedir.

Açıklama 8.4 (8.1) ve (8.11) bağıntılarındaki benzerlik nedeni ile, yukarıda detaylı olarak anlatılan her iki algoritma da ters AFD için kullanılabilir. (8.11)'deki ters AFD ifadesi şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} x^*(n) &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{nk}\right]^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k^* W_N^{-nk} \end{aligned} \tag{8.31}$$



Şekil 8.4 N= 8 için frekansta desimasyonlu HFD algoritması.

veya

$$x^*(n) = AFD\left[\frac{1}{N} X_k^*\right] \tag{8.32}$$

O halde, eğer karmaşık bir $x(n)$ dizisinin AFD dönüşümünü bulmaya yarayan bir bilgisayar programı varsa, programda hiçbir değişiklik yapmadan ters AFD operasyonu gerçekleştirilebilir. X_k/N 'nin kompleks eşleniği program girişine verilir ise, çıkış $x(n)$'nin kompleks eşleniği olacaktır.

8.5 MATRİS GÖSTERİLİMİ YARDIMIYLA HFD

AFD gerçeklenmesi için kullanılan Hızlı Fourier Dönüşümü algoritmasının geliştirilmesinde kullanılabilecek diğer bir yöntem, AFD'nin matris çarpımı gösteriliminden faydalanmaktır. AFD için matris gösterilimini (8.3) ve (8.9) denklemlerinde görmüştük. Hızlı Fourier Dönüşümü ile sağlanmak istenen, bu matris çarpımını daha az sayıda işlem uygulayarak gerçekleştirebilmektir. Bunu yapmanın yolu ise, AFD matrisi $\mathbf{W}_N$'nin, bol sıfırlar içeren matrislerin çarpımı şeklinde ayrıştırılması olacaktır. $\mathbf{W}_N$'yi oluşturan W_N^{nk} terimlerinin özelliği sayesinde bu mümkün olmaktadır.

N'nin 2'nin bir kuvveti olduğu ($N = 2^M$) varsayımı altında, 2 tabanlı (radix-2) bir HFD algoritması geliştirilecektir. HFD'yi gerçekleyecek matris ayrıştırması için izlenecek ana fikir, $\mathbf{W}_N$ matrisinin $\mathbf{W}_{N/2}$ matrisiyle ilişkilendirilmesi olacaktır. Örnek olarak $N = 4$ durumunu ele alalım. $N = 4$ için,

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 & \\ & \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & W_2 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & W_2 \end{bmatrix} \tag{8.33}$$

olmaktadır. $\mathbf{W}_4$ matrisini aşağıdaki şekilde ayrıştırmak mümkündür.

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & \\ & 1 & & W_4 \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & -W_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & W_2 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{8.34}$$

En sağdaki matris bir permütasyon matrisidir. Çift ve tek indisli vektör elemanlarını birbirinden ayırmaktadır. Ortadaki matris iki tane 2-noktalı AFD işlemi gerçekleştirmektedir. Soldaki matris ise bazı katsayılarla çarpım yapıp toplama işlemi gerçekleştirmektedir. Bu matris ayrıştırmasının Şekil 8.3'te gösterilen $N = 4$ için zamanda desimasyon algoritmasının eşdeğeri olduğu kolayca görülebilir. $\mathbf{W}_4$ için sağlanan bu ayrıştırma, çarpımda yer alan matrislerin bol sıfırlı olmasından dolayı matris çarpımında işlem sayısında bir azalma getirmektedir. $N = 4$ için geliştirilen bu ayrıştırma genel bir N için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{D}_{N/2} \\ \mathbf{I}_{N/2} & -\mathbf{D}_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 & \\ & \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{çift-tek indis} \\ \text{ayrıştırması} \end{bmatrix} \tag{8.35}$$

Burada $\mathbf{I}_k$ birim matrisi, $\mathbf{D}_k$ ise diyagonal elemanları $(1, W_k, W_k^2, \ldots, W_k^{k-1})$ olan diyagonal matrisi göstermektedir. Böylece zamanda desimasyonlu HFD algoritmasını, AFD'nin matris çarpımı olarak gösteriliminden faydalanarak çıkarmış olduk [6]. Benzer işlemler frekansta desimasyonlu HFD algoritması için de gerçeklenebilir.

REFERANSLAR

1. J. W. Cooley and J. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", *Math. Comput.*, 19, 297, April 1965.
2. H. K. Garg, *Digital Signal Processing Algorithms: Number Theory, Convolution, Fast Fourier Transforms, and Applications*, CRC Press, March 1998.
3. J. S. Walker, *Fast Fourier Transforms*, CRC Press, August 1996.
4. E. Brigham, *Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, March 1988.
5. M. Kurt, *Digital Signal Processing*, Books Britain, March 1987.
6. G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley Cambridge Press, August 1998.
7. V. K. Ingle and John G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB*, Brooks Cole, 1999.

PROBLEMLER

8.1 $N = 16$ için zamanda-desimasyonlu HFD algoritmasını geliştiriniz. Hesaplamanın doğal sırada yapılabileceğini gösteriniz. İşaret akış diyagramını çiziniz.

8.2 $N = 16$ için frekansta-desimasyonlu HFD algoritmasını geliştiriniz ve işaret akış diyagramını çiziniz.

8.3 Aşağıdaki $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü bulunmak istenmektedir.

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos t) & , 0 \leqslant |t| \leqslant \pi \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

a) Frekans domeninde 0.5 rad/san frekans seçiciliği elde edecek biçimde 64-noktalı HFD algoritması kullanarak Fourier dönüşümünü bulunuz.
b) 0.25 rad/san frekans domeni seçiciliği için, (a) şıkkını tekrarlayınız.
c) Analitik metodla $x(t)$'nin Fourier dönüşümünü bulunuz.
d) Elde edilen sonuçları karşılaştırınız.

8.4 Maksimum $N = 64$ karmaşık değerli giriş noktasına sahip bir HFD programının $N = 128$ gerçel noktalı bir dizi için kullanılabileceğini gösteriniz.

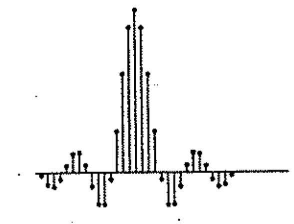
8.5 Bu bölümde $N = 2^M$ varsayımı altında 2-tabanlı HFD algoritmalarını geliştirdik. $N = 3^M$ olduğu durum için, 3-tabanlı zamanda desimasyonlu HFD algoritmasını geliştiriniz. Bu algoritma için gerekecek karmaşık değerli çarpma operasyonları sayısını bulunuz. 2-tabanlı HFD algoritması ile karşılaştırınız.

MATLAB UYGULAMALARI

M8.1 MATLAB'ile bir vektörün AFD'sinin hesaplanmasında `fft` komutu kullanılmaktadır. Bu komut, `X=fft(x)` yada `X=fft(x,N)` şeklinde çağrılmaktadır. İlk verilen şekilde çağrıldığında, x vektörünün uzunluğu ne ise X vektörü de o uzunlukta olmaktadır. Opsiyonel N parametresi ile birlikte kullanıldığında ise $x(n)$'nin N noktalı AFD'si hesaplanmaktadır. Eğer $x(n)$'nin uzunluğu N'den küçük ise, $x(n)$'nin sonuna uzunluğunu N sayısına tamamlayacak şekilde sıfırlar eklenmekte ve sonra N noktalı AFD'si hesaplanmaktadır.

$$x(n) = \sin(2n\pi/K); \quad 0 \leqslant n \leqslant K-1$$

dizisini ele alalım. $K = 100$ için bu diziyi oluşturun. MATLAB'de bu dizinin $N = 100$, $N = 200$ ve $N = 400$ noktalı AFD'lerini hesaplayınız ve çizdiriniz.



Bölüm 9
SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMINDA GENEL İLKELER

9.1 GİRİŞ

Sayısal işaret işlemenin amaçlarından biri, bir sayı dizisinin belirli özellikleri olan başka bir sayı dizisi elde edecek biçimde işlenmesi için algoritma veya aygıt tasarlamaktır. Bu aygıt veya algoritma *Sayısal Süzgeç* olarak adlandırılır. Bu bölüm, verilen belirli özellikleri gerçekleştiren sayısal süzgeçlerin tasarımına ait temel yöntemlerin tanıtılmasına ayrılmıştır. Sayısal süzgeçler, doğrusal ve doğrusal olmayan, zamanla-değişen ve zamanla-değişmeyen olarak sınıflandırılırlar. Doğrusal zamanla-değişmeyen sayısal süzgeçler için teori ve tasarım teknikleri sistematik olarak tamamlanmıştır. Sadece bu sınıfa ait olan süzgeçler incelenecektir.

Sayısal süzgecin matematiksel modellenmesine ve gerçekleştirilmesine ilişkin yöntemler Bölüm 2 ve 4'te ayrıntılı olarak tartışılmıştır. Ancak, sayısal süzgecin tasarımında gerekli olacak temel denklemleri burada kısaca tekrarlamak yararlı olacaktır. Özetle, sayısal süzgecin giriş ve çıkış işaretleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki fark denklemi ile modelleyebiliriz.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b(k)y(n-k) \tag{9.1}$$

z-dönüşümü yardımı ile sayısal süzgecin transfer fonksiyonu $H(z)$ (9.1)'den bulunabilir.

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{9.2}$$

Burada,

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} a(k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} b(k) z^{-k}} \tag{9.3}$$

(9.2)'deki denklemin zaman domeni karşılığı bir konvolüsyon toplamıdır.

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell) x(n-\ell) \tag{9.4}$$

$h(n)$ sayısal süzgecin impuls cevabıdır. Sayısal süzgecin istenilen özellikleri genellikle frekans domeninde verilir. Süzgecin frekans cevabı (9.3)'de z değişkeni yerine $z = e^{j\Omega}$ konularak bulunabilir.

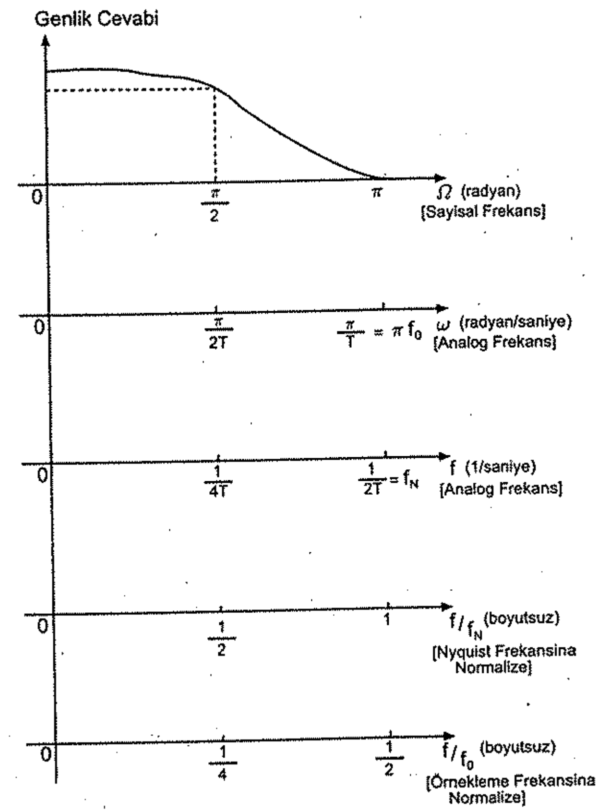
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} a(k) e^{-j\Omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} b(k) e^{-j\Omega k}} \tag{9.5}$$

Sayısal süzgecin frekans domeni karakteristiğini gösteren frekans cevabı, $H(e^{j\Omega})$, Ω frekansının karmaşık değerli bir fonksiyonudur. Sayısal süzgecin frekans cevabı $H(e^{j\Omega})$'nın ters Fourier dönüşümü ile elde edilen impuls cevabı $h(n)$ süzgecin zaman domeni özelliklerini karakterize eder. Ancak, zaman domeninde sayısal süzgeç özellikleri verilmesi yaygın değildir. Çoğunlukla, $H(e^{j\Omega})$'nın genlik spektrumunu gerçekleyen bir sayısal süzgeç bulunmaya çalışılır. (9.1) ve (9.5)'de gösterilen denklemler sayısal süzgeçlemede kullanılan temel matematiksel ifadelerdir.

Sayısal süzgeç tasarımında temel amaç verilen bir frekans spesifikasyonunun yaklaşık olarak, (9.3)'deki gibi rasyonel bir transfer fonksiyonu biçiminde ifade edilmesidir. Daha açık bir anlatımla, (9.3) denklemindeki $a(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, M$ ve $b(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ katsayılarının bulunması gerekmektedir.

9.2 KARAKTERİSTİKLERİN BELİRLENMESİ

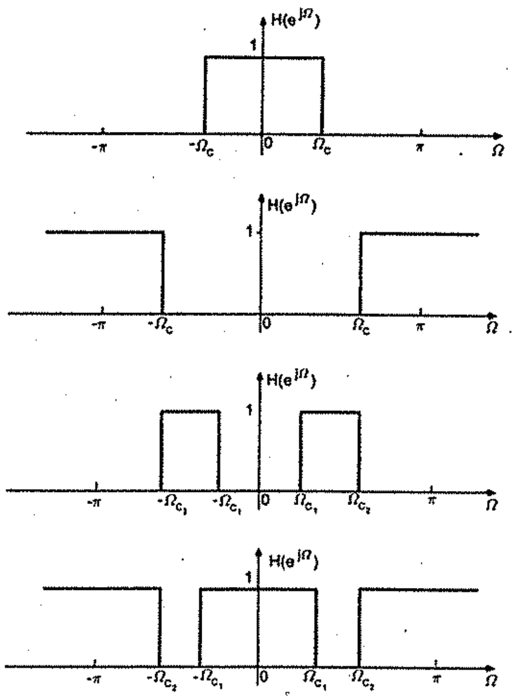
Sayısal süzgeç tasarımına esas olacak olan frekans cevabı özelliklerinin belirlenmesinde literatürde çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bazı kaynaklar süzgecin frekans cevabını sayısal frekans cinsinden ifade ederken, diğerleri analog frekansa cinsinden verebilmektedir [1-3]. Bazen de frekans cevabının Nyquist frekansı veya örnekleme frekansına normalize edilerek tanımlandığı görülmektedir. Birbirine eşdeğer olan tüm bu gösterilimlerin karıştırılmadan kullanılabilmesi için aşağıdaki hatırlatmaların yapılması zorunludur. (9.5)'te görülen



Şekil 9.1 Kesim frekansı $\Omega_c = \pi/2$ radyan olan alçak geçiren süzgecin frekans cevabının çeşitli biçimlerde gösterilimi.

sayısal süzgecin frekans cevabı $H(e^{j\Omega})$'nın periyodu 2π'dir. Buradaki Ω sayısal frekans olarak adlandırılır ve radyan cinsinden ifade edilir. Eğer süzgeçleme işlemi örnekleme aralığı $\Delta t = T$ olan bir işaret için gerçekleştirilirse, Ω sayısal frekansına karşılık düşen analog frekansı ω (radyan/saniye) veya f (1/saniye =Hertz) cinsinden ifade etmek mümkündür. Buna göre analog ve sayısal frekans arasındaki ilişki şöyle yazılır:

$$\underset{\text{Analog Frekans}}{\overset{(\omega)}{\downarrow}} \times \underset{\text{Örnekleme Aralığı}}{\overset{(T)}{\downarrow}} = \underset{\text{Sayısal Frekans}}{\overset{(\Omega)}{\downarrow}}$$

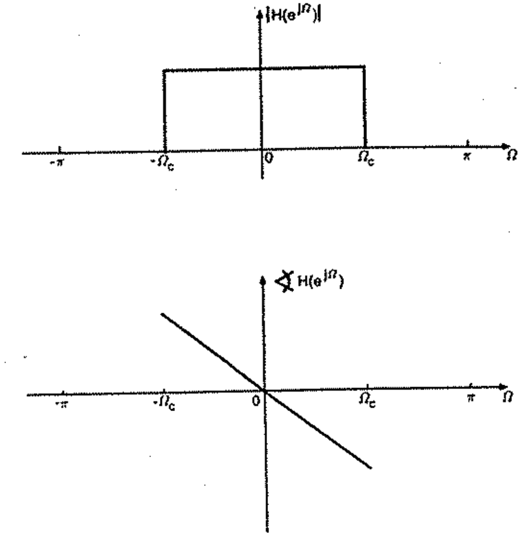


Şekil 9.2 İdeal sayısal süzgeç karakteristikleri: a) Alçak geçiren; b) Yüksek geçiren; c) bant geçiren; d) bant söndüren.

Örnekleme teoreminden Nyquist frekansının $f_N = 1/2T$ (1/saniye) olduğu hatırlanacak olursa süzgecin karakteristiğini f/f_N (boyutsuz) cinsinden de ifade etmek mümkündür. Frekansın Nyquist frekansına göre ifade edilmesinde temel periyot [-1, 1] arasıdır.

Ancak, bazen frekansın $f_0 = 1/T$ örnekleme frekansına oranı da (f/f_0 boyutsuz) kullanılır. Bu gösterilimde temel periyot (−1/2, 1/2) arasıdır. Şekil 9.1'de kesim frekansı $\Omega_c = \pi/2$ olan bir alçak geçiren süzgeç için tüm olası gösterilim biçimleri görülmektedir.

Açıklama 9.1 Analog bir süzgeç karakteristiği tanımlanırken kullanılan frekans aralığı (-∞, ∞)'dur. Oysa, sayısal süzgeçlerde tanım aralığı $(-f_N, f_N)$ olmaktadır. Yani, sayısal süzgeçte işlenebilecek maksimum frekans bileşeni örnekleme frekansının yarısı olan Nyquist frekansıdır.



Şekil 9.3 İdeal alçak geçiren sayısal süzgecin genlik ve faz cevabı.

Açıklama 9.2 Buraya kadar tüm frekans domeni analizinde analog frekans (ω) kullanıldı. $\Omega = \omega T$ eşitliğinde sayısal işaretin sayısal frekans cinsinden spektrumunun elde edilmesi mümkündür. Literatürde bazen Ω yerine λ veya θ gibi değişkenlerde sayısal frekansı belirtmede kullanılır.

9.3 İDEAL SAYISAL SÜZGEÇLER

Genellikle süzgeçler frekans cevaplarına göre sınıflandırılırlar. Alçak geçiren, yüksek geçiren, bant geçiren ve bant söndüren süzgeçler önemli sınıflardır. Bunlara ilişkin ideal frekans karakteristikleri Şekil 9.2'de gösterilmiştir. Bu şekildeki süzgeçlerde süzgeçleme ideal bir özellik göstermektedir. Buna göre zayıflatılmak istenen frekans bölgesi tamamen bastırılırken, geçirilmek istenen frekans bölgesi hiçbir değişikliğe uğratılmadan çıkışa transfer edilmektedir.

Şimdi, ideal süzgeçler konusunda daha fazla bilgi edinebilmek için pek çok kullanım alanı olan ideal alçak geçiren sayısal süzgeci inceleyelim.

9.3.1 İdeal Alçak Geçiren Süzgeç

Eğer sinüzoidal bir dizi $x(n)= \sin(\Omega_0 n)u(n)$, transfer fonksiyonu $H(z)$ olan bir kararlı süzgecin girişine uygulanırsa, süzgecin kararlı-durum çıkışı

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = |H(e^{j\Omega_0})| \sin[n\Omega_0 + \angle H(e^{j\Omega_0})] \tag{9.6}$$

olarak bulunur. Eğer $|H(e^{j\Omega_0})| = 1$ ise işaret herhangi bir zayıflama olmaksızın süzgeçten geçecektir. Ancak, faz kayması olacaktır. Eğer $|H(e^{j\Omega_0})| = 0$ ise, $x(n) = \sin(\Omega_0 n)u(n)$ işareti için süzgecin kararlı-durum çıkışı sıfırdır. Yani, $x(n)$ işareti süzgeç tarafından durdurulmuştur.

Genlik ve faz karakteristiği Şekil 9.3'teki gibi olan süzgeci ele alalım. Transfer fonksiyonu,

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-jn_0\Omega} & |\Omega| \leqslant \Omega_c \text{ için} \\ 0 & \Omega_c \leqslant |\Omega| \leqslant \pi \text{ için} \end{cases} \tag{9.7}$$

olarak verilir. (9.7)'deki n_0 pozitif bir tam sayıdır. $(0,\ \Omega_c)$ frekans aralığı geçirme bandı ve Ω_c geçirme bandı kesim frekansı olarak adlandırılır. Bu süzgecin işleyişini açıklamak için Şekil 9.4'te spektrumları gösterilen $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ işaretlerini ele alalım. $x_1(n)$ işareti için süzgecin çıkışı

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X_1(e^{j\Omega}) \tag{9.8}$$

denkleminden hesaplanır. $|\Omega| > \Omega_c$ için $H(e^{j\Omega})= 0$ ve $|\Omega| < \Omega_c$ için $X_1(e^{j\Omega})=$ 0 olduğundan tüm Ω değerleri için $Y(e^{j\Omega}) = 0$ bulunur. O halde süzgecin $u(n)$ girişine cevabı sıfırdır. Şimdi, $|\Omega| > \Omega_c$ için $X_2(e^{j\Omega}) = 0$ olan $x_2(n)$ giriş işaretine süzgecin çıkışı

$$Y(e^{j\Omega}) = 1 \cdot e^{-jn_0\Omega}X_2(e^{j\Omega}), \qquad \text{tüm } \Omega \text{ için} \tag{9.9}$$

veya

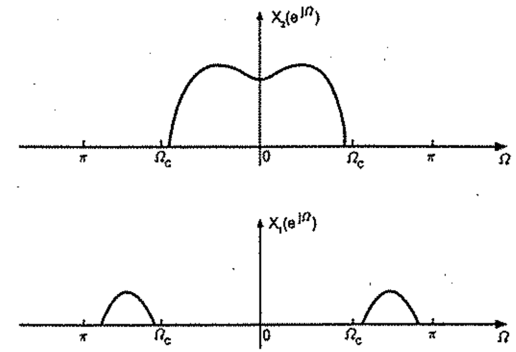
$$Y(z) = z^{-n_0}X_2(z) \tag{9.10}$$

olarak verilir. (9.12)'den ters z-dönüşümü alınarak

$$y(n) = x_2(n - n_0)$$

bulunur. Başka bir anlatımla çıkış, giriş işaretinin n_0 örnekleme periyodu kadar geciktirilmişidir.

İdeal alçak geçiren süzgeçler, geçirme bandı dışındaki işaretleri tamamen bastırmakta ve geçirme bandı içindeki işaretleri bir gecikme ile aynen iletmektedir. Geçirme-bandında ideal alçak geçiren süzgecin genlik cevabı sabit genlikli, faz cevabı ise ω'nın doğrusal bir fonksiyonu olmak zorundadır.



Şekil 9.4 $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ işaretlerinin spektrumları.

9.3.2 Tüm-Geçiren Süzgeçler

Tüm-geçiren bir süzgeç tüm frekans spektrumu boyunca sabit bir genlik cevabına sahiptir.

$$|H(e^{j\Omega})| = 1, \quad -\pi \leqslant \Omega \leqslant \pi \tag{9.11}$$

Rasyonel transfer fonksiyonuna sahip süzgeçler için bu sabit genlik cevabı koşulu, süzgecin sıfır ve kutupları arasında bir ilişki getirir. Süzgecin sıfır ve kutupları birbirlerinin karmaşık eşlenikleri şeklinde olmalıdır:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \tag{9.12}$$

Böylece eğer süzgecin $z = a_k$ noktasında bir kutbu varsa, buna karşılık gelen karmaşık eşlenik $z = 1/a_k^*$ noktasında bir sıfırı bulunmalıdır. Tüm-geçiren bir süzgeçle ardışıl olarak bağlanan bir süzgeç için toplam genlik cevabı değişmemektedir. Böylece tüm-geçiren süzgeçler doğru şekilde tasarlanarak genlik cevabını aynı tutmak koşuluyla istenen bir faz cevabını elde etmek için kullanılabilirler. Bu nedenle tüm-geçiren süzgeçler faz bozulmalarını düzeltmek için ve grup gecikmesi denkleştirici olarak kullanım alanı bulmaktadırlar.

Örnek 9.1 Transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilen süzgecin tüm-geçiren olduğunu gösterelim.

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Frekans cevabı $H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$ ile bulunur. Böylece,

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{-j\Omega} - 0.5}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

$|H(e^{j\Omega})|^2 = H(e^{j\Omega}) \cdot H(e^{j\Omega})^*$ olarak verilir. Buradan genlik cevabının karesi,

$$|H(e^{j\Omega})|^2 = \frac{e^{-j\Omega} - 0.5}{1 - 0.5^{-j\Omega}} \cdot \frac{e^{j\Omega} - 0.5}{1 - 0.5^{j\Omega}} = \frac{1 - 0.5(e^{-j\Omega} + e^{j\Omega}) + 0.25}{1 - 0.5(e^{-j\Omega} + e^{j\Omega}) + 0.25} = 1$$

olarak bulunur. İstenildiği şekilde $|H(e^{j\Omega})| = 1$ olmaktadır.

9.3.3 Fiziksel Gerçekleştirme

(9.7)'de tanımlanan ideal alçak geçiren süzgeç fiziksel olarak gerçeklenebilir mi? Bölüm 2'de tartışıldığı gibi, fiziksel gerçekleştirilebilirlik için süzgeç nedensel olmalıdır. Eşdeğer olarak, süzgecin impuls cevabı

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \text{ için} \tag{9.13}$$

koşulunu sağlamalıdır. İdeal alçak geçiren süzgeç için bu koşulu test edelim. Süzgecin ters z-dönüşümü

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z) z^{n-1} dz \tag{9.14}$$

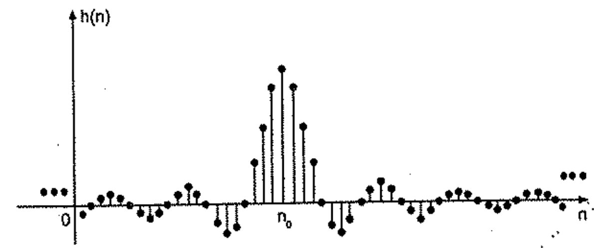
olarak verilir. C kontoru yakınsaklık bölgesi içindedir. Süzgecin kararlı olması gerektiğinden, yakınsaklık bölgesi $|z| = 1$'i kapsar. Bu nedenle, C konturu z-düzleminde birim daire olarak seçilebilir. $z = e^{j\Omega}$ konularak (9.14)

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \tag{9.15}$$

yazılabilir. (9.7) tanım ifadesi (9.15)'de yerine konulursa,

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n - n_0)\Omega_c}{(n - n_0)\pi} & n \neq n_0 \text{ için} \\ \dfrac{\Omega_c}{\pi} & n = n_0 \text{ için} \end{cases} \tag{9.16}$$

bulunur. (9.16), $h(n)$'nin (9.13)'deki sağ taraflı nedensel dizi olma koşulunu sağlamadığını açık bir şekilde göstermektedir. Yani, $n < 0$ için $h(n) \neq 0$ olmaktadır. O halde, ideal alçak geçiren süzgeç fiziksel olarak gerçekleştirilemez. Şekil 9.5, ideal alçak geçiren süzgecin (9.16)'da verilen impuls cevabını göstermektedir.



Şekil 9.5 İdeal alçak geçiren süzgecin impuls cevabı.

Teorem 9.1 (Paley-Wiener). Eğer süzgeç impuls cevabı $h(n)$ sınırlı enerjiye sahipse ve $n < 0$ için $h(n) = 0$ ise aşağıdaki koşul geçerlidir.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big|\ln|H(e^{j\Omega})|\big| d\Omega < \infty$$

Bu ilişkinin tersi olarak $|H(e^{j\Omega})|$ karesel integrali alınabilirse (sınırlı enerji koşulu) ve yukarıda verilen integral sınırlı ise, genlik cevabı $|H(e^{j\Omega})|$ olacak şekilde nedensel bir $h(n)$ fonsiyonu bulunabilir.

Paley-Wiener teoreminden çıkarabileceğimiz önemli bir sonuç nedensel ve kararlı bir impuls fonksiyonu için $|H(e^{j\Omega})|$'nin sınırlı sayıda noktada sıfır olabileceği, ancak bir bant boyunca sürekli olarak sıfır olamayacağıdır. Çünkü, bu durumda yukarıda verilen integral sınırlı olmamaktadır. Böylece hiçbir ideal frekans cevaplı süzgecin nedensel bir impuls cevabına sahip olamayacağı anlaşılmaktadır.

Bu noktada doğal olarak şu soru ortaya çıkmaktadır: Genlik ve faz karakteristikleri nasıl seçilmelidir ki süzgeç fiziksel olarak gerçeklenebilsin? Genellikle, süzgecin genlik ve faz karakteristiği bağımsız olarak belirlenirse tasarlanmak istenen süzgeç fiziksel olarak gerçeklenemez. Sadece süzgecin genlik karakteristiği $|H(e^{j\Omega})|$ verilir ve faz özellikleri serbest bırakılırsa istenen spesifikasyona mümkün olduğunca yakın fiziksel olarak gerçeklenebilir bir süzgeç tasarlanabilir. Ancak, sonuçta tasarlanan süzgecin transfer fonksiyonu çok yüksek dereceden bir rasyonel transfer fonksiyonu olabilir. Bu da pahalı bir gerçeklemeye neden olur. Bu nedenle, pratik tasarımlarda süzgecin nedensel olmasına ek olarak basit rasyonel transfer fonksiyonu ile ifade edilmesi arzu edilir.

Süzgeç tasarımında nedensellik ve basitlik koşuluna ilave olarak süzgecin kararlılık koşulu da dikkate alınmalıdır. Verilen genlik karakteristiğini bu üç koşul altında tam olarak sağlamak oldukça zordur. Bundan dolayı istenilen süzgecin karakteristiği tam olarak belirlenmek yerine bir tolerans içinde verilir.

9.4 İDEAL OLMAYAN SAYISAL SÜZGEÇLER

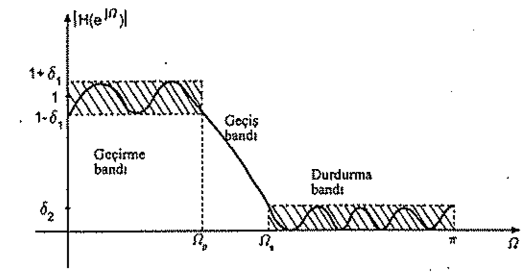
Şekil 9.1'deki süzgeçlerin idealize edilmiş karakteristiklerinden dolayı, gerçek süzgeçler verilen spesifikasyonları ancak yaklaşık olarak gerçekler. Ayrıca, pek çok pratik süzgeçleme işleminde ideal frekans seçici karakteristik arzu edilmez. Süzgecin geçirme ve durdurma bandında biraz esneklik istenilmesi yanı sıra geçiş bandı ile durdurma bandı arasında daha kademeli geçiş olmasına müsaade edilir. İdeal süzgeç karakteristiğinde geçirme ve durdurma bantları arasında çok ani bir geçiş vardır. Bu nedenle, gerçek süzgeçlerde geçirme ve durdurma bantlarına ilave olarak birde geçiş bandı vardır. O halde, bir alçak geçiren süzgeç için frekans cevabının genliği Şekil 9.6'daki taralı alan içerisinde kalmalıdır. Bu şekilde görüldüğü gibi geçirme bandı içinde bire göre $\pm\delta_1$ kadar bir değişim ile, durdurma bandı içinde sıfıra göre δ_2 kadar bir değişme izin verilir. Geçirme bandında birim genliğe göre olan değişime geçirme bandı dalgalanması ve durdurma bandında sıfıra göre olan değişime de durdurma bandı dalgalanması adı verilir.

Ω_p ve Ω_s frekanslarına sırasıyla geçirme ve durdurma bandı kenarı adı verilir. Ω_p'den Ω_s'ye kadar olan frekans aralığı ise geçirme bandından durdurma bandına olan geçiş için bırakılmıştır. Bu frekans aralığı geçiş bandı olarak adlandırılır.

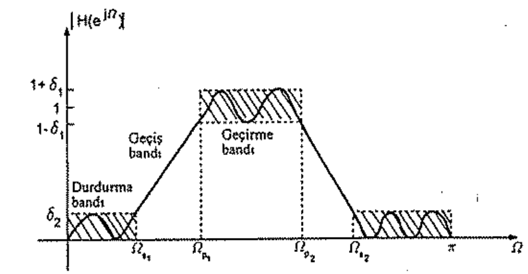
$\Omega = 0$ ve $\Omega = \pi$ frekansları dışında bir frekans aralığını geçiren ve diğer frekansları durduran süzgeçler bant geçiren süzgeç olarak adlandırılır. Şekil 9.7'de bir bant geçiren süzgecin spesifikasyonları görülmektedir. Bir bant geçiren bölüm olmasına karşılık durdurma bantları iki bölümdür. Yüksek geçiren süzgeçler ve bant söndüren süzgeçler için benzer tanımlar yapılabilir.
Sayısal süzgecin faz karakteristiği benzer şekilde belirlenebilir. Ancak, genellikle faz karakteristiği $\theta(\Omega) = \angle H(e^{j\Omega})$ yerine grup gecikmesi $\tau(\Omega)$ kullanılır. Grup gecikmesi şöyle tanımlanır.

$$\tau(\Omega) = -\frac{d\theta(\Omega)}{d\Omega} \tag{9.17}$$

9.7)'de tanımlanan ideal alçak geçiren süzgeç için grup gecikmesi sabittir.



Şekil 9.6 Alçak geçiren süzgecin frekans cevabı özelikleri.



Şekil 9.7 Bant geçiren süzgecin frekans cevabı özelikleri.

Buna göre,

$$\tau_{\text{ideal}}(\Omega) = n_0 \tag{9.18}$$

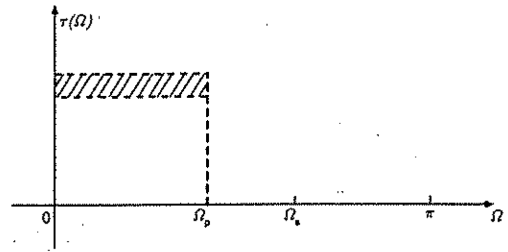
yazılabilir. Bu nedenle alçak geçiren süzgeç tasarımında geçirme bandı içinde grup gecikmesinin sabit kalması arzu edilir. Şekil 9.8'dekine benzer spesifikasyon grup gecikmesi için verilebilir.

9.5 GEÇİCİ PERFORMANS

Sayısal süzgecin transfer fonksiyonu $H(z)$'nin genlik ve faz karakteristiklerine ilişkin ayrıntılar süzgecin kararlı-durum cevabına ilişkindir. Bu nedenle $|H(e^{j\Omega})|$ ve $\theta(\Omega)$ veya $\tau(\Omega)$ kararlı-durum spesifikasyonları olarak adlandırılırlar.

Süzgecin bu söz konusu kararlı-duruma geçme hızı da önemli özelliklerinden biridir. İyi tasarlanmış bir süzgeçte cevap hızı yüksektir. Ayrıca, süzgecin cevabının sürekli duruma gelinceye kadar gösterdiği davranışta dikkate alınmalıdır.

Kararlı-durum cevabı $y_{ss}(n)$ limit durumunda n sonsuza yaklaşırken süzgeci



Şekil 9.8 Alçak geçiren süzgecin grup gecikmesi özellikleri. Taralı bölge grup gecikmesi içim toleransları göstermektedir.

cevabı olarak tanımlanır. Oysa, geçici performans giriş işaretinin süzgece uygulanmasından hemen sonraki cevap olarak tanımlanmaktadır [4]. Kararlı durum cevabının sinüzoidal girişlere ($x(n) = sin\Omega_0 n$) göre tanımlanmasına karşılık geçici cevap performansı birim basamak dizisi ($x(n) = u(n)$) için tanımlanır. Şekil 9.9'da iki farklı sayısal süzgecin geçici performansları görülmektedir. Buna göre, Şekil 9.9(a)'da süzgecin geçici performansında salınım görülmekte ve süzgeç çıkışı başlangıçta kararlı-durum çıkışından büyük değerler alabilmektedir. Geçici performansın belirlenebilmesi için yükselme zamanı, yerleşme zamanı ve aşma gibi kavramlar gereklidir. Şimdi bunları tanımlayalım. Eğer kararlı durum cevabı

$$y_{ss}(n) = \lim_{n\to\infty} y(n) \tag{9.19}$$

olarak tanımlanırsa, yükselme zamanı

$$y(n_r) \geqslant 0.9y_{ss}(n) \tag{9.20}$$

şartını sağlayan ilk n_r anıdır. Yerleşme zamanı n_s ise

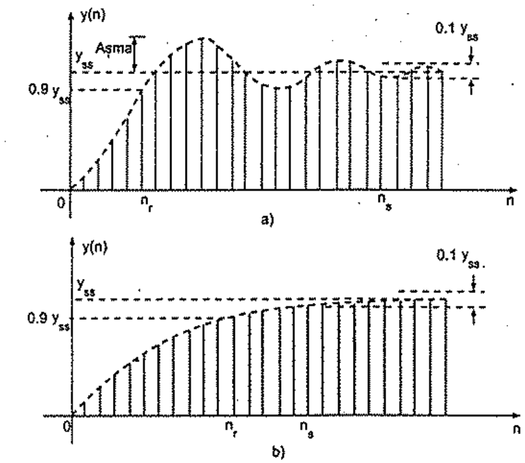
$$|y(n) - y_{ss}| \leqslant 0.05y_{ss} \quad \text{tüm } n > n_s \text{ için}$$

şartını sağlayan ilk andır.

$y_{max} = \max(y(n))$ olarak tanımlayalım. Eğer $y_{max} \leqslant y_{ss}$ ise süzgecin cevabında aşma (overshoot) yoktur denir. Eğer $y_{max} > y_{ss}$ ise aşma

$$\text{aşma} = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}}$$

olarak tanımlanır. İyi tasarlanmiş bir süzgeçte küçük yükselme zamanı, küçük yerleşme zamanı ve küçük aşma olmalıdır.



Şekil 9.9 Sayısal süzgeçlerde geçici performans a) geçici cevapta aşma; b) aşma olmayan geçici cevap.

Açıklama 9.3 Sayısal bir süzgecin kararlı-durum performansı ve geçici performansı tamamen ilişkisiz değildir. Alçak geçiren bir süzgeçte, bant genişliği arttıkça yükselme zamanı küçülür. Ayrıca, genlik cevabı $|H(e^{j\Omega})|$ ile aşma arasında bir tür ilişki vardır.

Açıklama 9.4 Sayısal süzgeç tasarımında hem kararlı-durum performansı hem de geçici performans ele alınmalıdır. Ancak her iki performans özelliklerini birlikte değerlendirecek basit bir tasarım yöntemi mevcut değildir. Uygulamada süzgecin sadece genlik karakteristiği ve geçici performans kontrol edilir. Eğer bunlar tatmin edici ise tasarım tamamlanmıştır. Aksi halde tasarım işlemi tekrarlanır.

REFERANSLAR

1. L.B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
2. R.W. Hamming, *Digital Filters*, Dover Publications, 1998.

3. A. Antoniou *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1979.

4. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing, A Computer Based Approach*, Mc Graw-Hill, 2001.

5. V. K. Ingle and John G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB*, Brooks Cole, 1999.

PROBLEMLER

9.1 50 kHz örnekleme frekansı ile çalışan bir alçak geçiren süzgecin kesim frekansı 10 kHz olarak verilsin. [rad] cinsinden sayısal kesim frekansı Ω_c ne olacaktır?

9.2 Transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilen süzgeci gözönüne alalım.

$$H(z) = \frac{z^{-1} + 0.2}{1 + 0.2z^{-1}}$$

Giriş işaretleri ise $x_1(n) = \cos(0.2\pi n)$ ve $x_2(n) = \cos(0.3\pi n)$ olarak verilsin. Bu giriş işaretlerine karşılık gelen çıkış işaretleri de sırasıyla $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ olarak belirtilsin.

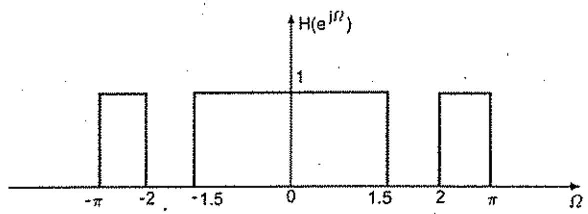
a) $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ işaretlerinin genliği ne olacaktır? Süzgecin genlik cevabından faydalanarak cevaplayınız.

b) $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ işaretlerinin $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ işaretlerine göre olan fazları ne olacaktır? Süzgecin faz cevabından faydalanarak cevaplayınız.

9.3 Şekil 9.10'da ideal bant söndüren süzgeç görülmektedir.

a) İmpuls cevabını bulunuz.

b) Süzgeç nedensel midir?



Şekil 9.10

9.4 Transfer fonksiyonu $H(z) = 0.5 + z^{-1} + 0.5z^{-2}$ olarak verilen sayısal süzgeci inceleyelim.

a) Genlik ve faz karakteristiğini çiziniz.

b) Grup gecikmesini çiziniz. Sabit grup gecikmeli midir?

c) Alçak geçiren veya yüksek geçiren olduğunu belirleyiniz.

9.5 Transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{0.6(z + 1/3)}{z - 0.2}$$

olarak verilen sayısal süzgecin

a) Genlik ve faz karakteristiğini çiziniz.

b) Grup gecikmesi nedir?

c) Alçak geçiren veya yüksek geçiren olduğunu belirleyiniz.

9.6 Problem 9.3'teki süzgecin birim basamak dizisine cevabını bulunuz ve çiziniz. Yükselme zamanı, yerleşme zamanı ve aşma nedir?

MATLAB UYGULAMALARI

M9.1 Aşağıda verilen tüm-geçiren frekans cevabına sahip süzgeci göz önüne alalım.

$$H(z) = \frac{0.2 - 0.9z^{-1} + 1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2}}$$

Bu süzgeç ile değişik frekanslara sahip sinüzoidleri işleyip oluşan farklı grup gecikmelerini inceleyiniz. Bunun için MATLAB `grpdelay` komutunu kullanabilirsiniz. Bu komutun kullanımı `[Gg,W] = grpdelay(B,A,N)` şeklinde olmaktadır. Burada `B` ve `A` süzgeç transfer fonksiyonu katsayılarını, opsiyonel `N` frekans örneği sayısını, `W` frekans vektörünü, `Gg` ise karşı gelen grup gecikmesi değerlerini vermektedir.

a) $k = 1 \ldots 5$ için gittikçe artan frekanslara sahip $x_k(n) = \cos(20\frac{2\pi k}{512}(n - 25$ $n = 0, \ldots, 511$ sinüzoidlerini oluşturun.

b) Bu sinüzoidler için üstteki süzgecin verdiği çıkışı `filter` komutunu kullanarak hesaplayınız. Giriş $x_k(n)$ ve çıkış $y_k(n)$ işaretlerini çizdiriniz.

c) Aşağıdaki MATLAB kodunu kullanarak süzgecin grup gecikmesini bulunuz ve çizdiriniz.

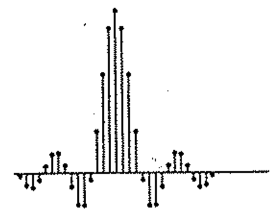
```
B = [0.2 -0.9   1.0]; A = [1.0 -0.9   0.2];
[Gg,W] = grpdelay(B,A); plot(W,Gg);
```

d) Giriş ve çıkış işaretleri arasında oluşan ve gözlemlediğiniz gecikme değerlerini, grpdelay komutu ile bulduğunuz değerlerle karşılaştırınız.

M9.2 Aşağıda verilen nedensel sayısal süzgecin genlik ve faz cevabını MATLAB kullanarak çizdiriniz.

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})^3}{(1 - 1.4z^{-1} + 0.6z^{-2})(1 - 1.6z^{-1} + 0.5z^{-2})}$$

Frekans cevabına bakarak bu süzgecin tipini belirleyiniz. Süzgecin fark denklemini bulunuz.



Bölüm 10

FIR SÜZGEÇ TASARIM METODLARI

10.1 GİRİŞ

Sonlu impuls cevaplı olan süzgeçler finite-impulse response (FIR) süzgeç olarak adlandırılır. FIR süzgeçlerin bazı önemli özellikleri vardır. Bölüm 2'de tartışıldığı üzere FIR süzgeçler daima kararlıdır. Ayrıca, sonlu gecikme yardımı ile daima nedensel olması sağlanabilir. Özyineli (recursive) süzgeçlerin aksine, FIR süzgeçler kolayca doğrusal fazlı olarak tasarlanabilir.

Bu bölümde, FIR süzgecin transfer fonksiyonu özellikleri belirtildikten sonra tasarım yöntemleri ayrıntılı olarak incelenecektir.

10.2 FIR SÜZGECİN ÖZELLİKLERİ

Özyineli (recursive) olmayan nedensel bir süzgecin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \tag{10.1}$$

formunda ifade edilir. Burada toplam 0'dan $N-1$'e kadardır. Yani (10.1) denkleminde $h(n)$ N tane terime sahiptir. Bu süzgecin frekans cevabı transfer fonksiyonunda $z = e^{j\Omega}$ değeri konularak bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\Omega n} \\ &= M(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} \end{aligned} \tag{10.2}$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} M(\Omega) &= |H(e^{j\Omega})| \\ \theta(\Omega) &= \angle H(e^{j\Omega}) \end{aligned} \tag{10.3}$$

olarak tanımlanır. Şimdi, $h(n)$'nin bazı şartları sağlaması durumunda, transfer fonksiyonu $H(z)$'nin çok istenilen bir özelliği olduğunu göstereceğiz. Bu istenilen özellik, doğrusal faz yada sabit grup gecikmesidir.

Bir süzgecin faz gecikmesi $\tau_f(\Omega)$ ve grup gecikmesi $\tau_g(\Omega)$, sırasıyla

$$\tau_f(\Omega) = -\frac{\theta(\Omega)}{\Omega} \tag{10.4}$$

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d\theta(\Omega)}{d\Omega} \tag{10.5}$$

olarak tanımlanır. Sabit bir faz gecikmesi yanısıra sabit bir grup gecikmesi olması için süzgecin faz cevabı $\theta(\Omega)$ doğrusal olmalıdır. Yani, süzgecin faz cevabı için

$$\theta(\Omega) = -\tau\Omega \tag{10.6}$$

yazılabilir.

FIR süzgecin transfer fonksiyonunu ifade eden (10.1) denkleminde terim sayısını tek varsayalım. $N' = (N-1)/2$ olarak tanımlansın.

Eğer $h'(n) = h(n+N')$ nedensel olmayan yeni bir süzgecin impuls cevabı olarak tanımlanır ise (10.1) denkleminden

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{2N'} h(n) z^{-n} \\ &= \sum_{k=-N'}^{N'} h(k+N') z^{-(k+N')} \\ &= z^{-N'} \sum_{k=-N'}^{N'} h'(k) z^{-k} = z^{-N} H'(z) \end{aligned} \tag{10.7}$$

yazılabilir. (10.7)'deki nedensel olmayan süzgecin transfer fonksiyonu $H'(z)$

$$H'(z) = \sum_{k=-N'}^{N'} h'(k) z^{-k} \tag{10.8}$$

olarak tanımlanır. (10.7)'de nedensel olmayan $H'(z)$ transfer fonksiyonunun $z^{-N'}$ gecikmesi yardımıyla nedensel olarak gerçeklenebileceği görülmektedir.

Şimdi, $h'(n)$'nin bazı koşulları sağlaması durumunda $H(z)$'nin doğrusal fazlı olduğu gösterilebilir [1-3].

İki taraflı $h(n)$ dizisinin orta noktaya göre simetrik yani,

$$h'(n) = h'(-n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots N' \text{ için} \tag{10.9}$$

olduğunu varsayalım. Bu koşul altında $H(e^{j\Omega})$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= e^{-j\Omega N'} \sum_{k=-N'}^{N'} h'(k) e^{-j\Omega k} \\ &= e^{-j\Omega N'} \left[h'(0) + \sum_{k=1}^{N'} h'(k)(e^{j\Omega k} + e^{-j\Omega k}) \right] \\ &= e^{-j\Omega N'} \left[h'(0) + \sum_{k=1}^{N'} 2h'(k) \cos \Omega k \right] \\ &= e^{-j\Omega N'} H'(e^{j\Omega}) \end{aligned} \tag{10.10}$$

Eğer $h'(k)$ gerçel ise, $H'(e^{j\Omega})$, Ω sayısal frekansının gerçel bir fonksiyonudur. $H'(e^{j\Omega}) > 0$ ise, $H(e^{j\Omega})$'nın fazı

$$\theta(\Omega) = -\Omega N' \tag{10.11}$$

olarak yazılabilir. Eğer $H'(e^{j\Omega}) < 0$ ise, $H(e^{j\Omega})$ nın fazı

$$\theta(\Omega) = \pi - \Omega N' \tag{10.12}$$

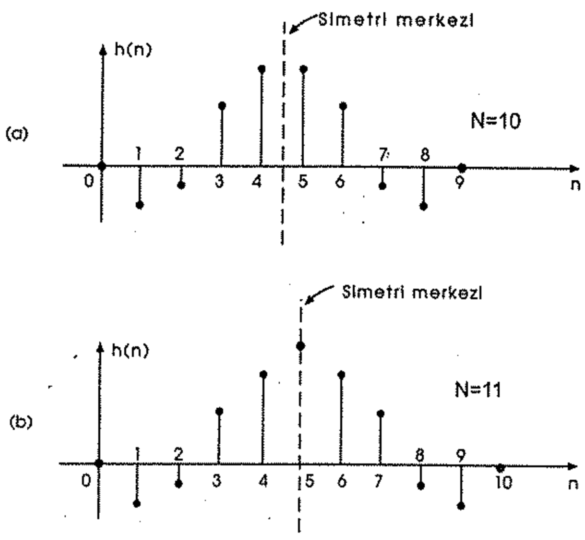
olur. O halde, (10.11) ve (10.12)'den $H(e^{j\Omega})$'nın fazının doğrusal olduğu görülmektedir. Ya da eşdeğer olarak transfer fonksiyonu $H(z)$'nin grup gecikmesi

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d\theta(\Omega)}{d\Omega} = N' \tag{10.13}$$

sabittir. Sabit faz ve grup gecikmeli süzgecin simetrik impuls cevabı, N'nin tek ve çift olması durumları için Şekil 10.1'de gösterilmiştir. Sabit grup gecikmesi için simetri özelliği tek koşul değildir. Eğer $h(n)$ ters simetrik özelliği olan

$$h'(n) = -h'(-n); \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N' \text{ için} \tag{10.14}$$

koşulunu sağlarsa transfer fonksiyonu $H(z)$'nin grup gecikmesi yine sabittir. Şekil 10.2'de ters simetrik impuls cevapları gösterilmiştir. Bunu ispatlamak



Şekil 10.1 Sabit faz ve grup gecikmesi için simetrik impuls cevabı: a) N çift; b) N tek

için önce (10.14)'deki koşuldan $h'(0) = 0$ olduğu bulunacaktır. O halde,

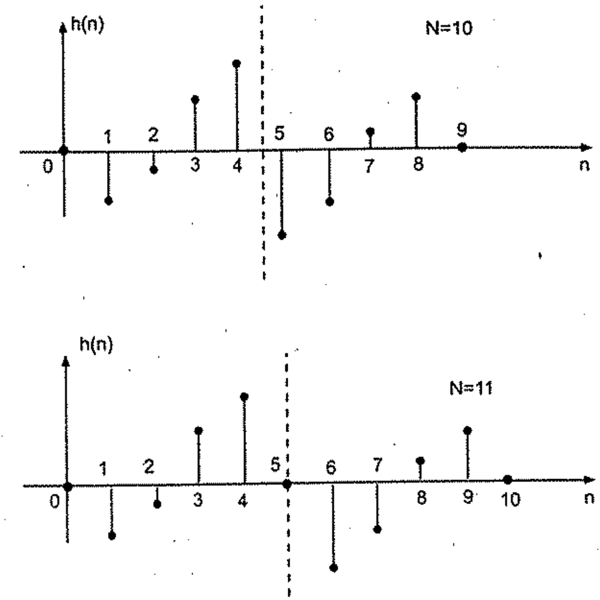
$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= e^{-j\Omega N'} \sum_{k=1}^{N'} h'(k)(e^{-jk\Omega} - e^{jk\Omega}) \\ &= e^{-j\Omega N'}(-j) \sum_{k=1}^{N'} 2h'(k) \sin k\Omega \\ &= e^{j\Omega N'} H'(e^{j\Omega}) \end{aligned} \tag{10.15}$$

Eğer $h(k)$ gerçel ise, $H'(e^{j\Omega})$ saf sanaldır. $H(e^{j\Omega})$'nın fazı

$$\theta(\Omega) = \theta_0 - \Omega N' \tag{10.16}$$

θ_0 sabit fazı $(\pi/2)$ veya $-(\pi/2)$ olur. (10.16) ifadesinden $H(z)$'nin fazının Ω sayısal frekansının doğrusal bir fonksiyonu olduğu görülmektedir.

(10.8)'de tanımlanan süzgeç $z^{N'}$'ye kadar sıfırdan farklı katsayıları bulunduğu için nedensel değildir. Ancak, N' birim gecikme kullanarak $z^{-N'}H'(z)$'nin nedensel olması sağlanabilir. Bu nedenle, nedensel olmayan $H'(z)$ süzgecinin tasarımını tartışabiliriz. Ayrıca, $H'(z)$'nin katsayılarının simetrik veya ters simetrik olmasını istemekteyiz. Böylece $H'(z)$'nin N' kadar geciktirilmesiyle sabit grup gecikmeli nedensel FIR süzgeç elde edilir.



Şekil 10.2 Sabit faz ve grup gecikmesi için ters simetrik impuls cevabı: a) N çift; b) N tek

(10.7) denkleminde N tek bir tamsayı olarak düşünüldü. Eğer N çift bir tamsayı ise $N' = (N/2)$ olarak alınır. Bu bölümde, impuls uzunluğu N tek olan FIR tasarımları üzerinde durulacaktır. N çift için biraz daha karışık olmakla beraber benzer yöntemler geliştirilebilir.

Açıklama 10.1 (10.9) ve (10.14)'deki impuls cevabı üzerine olan koşullar nedensel süzgecin transfer fonksiyonu $H(z)$'nin sıfırları üzerine bazı sınırlamalar getirir. (10.1), (10.9) ve (10.14) denklemlerinden,

$$H(z) = \frac{1}{z^{N'}} \sum_{k=0}^{N'-1} h(k)(z^{N'-k} \pm z^{-N'+k}) + \frac{1}{2}h(N')(z^0 \pm z^0) \tag{10.17}$$

bulunur. (10.17)'deki eksi işaret ters simetrik impuls cevabı içindir. $\ell = N' - k$ değişken dönüşümü yardımıyla,

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{1}{z^{N'}} \sum_{\ell=0}^{N'} \frac{a(\ell)}{2}(z^{\ell} \pm z^{-\ell}) \tag{10.18}$$

yazılabilir. Buradaki $a(0)$ ve $a(\ell)$

$$\begin{aligned} a(0) &= h(N') \\ a(\ell) &= h(N' - \ell) \end{aligned} \tag{10.19}$$

olarak tanımlanır.

FIR süzgecin transfer fonksiyonu $H(z)$'nin sıfırları (10.18)'deki pay polinomu $N(z)$'nin köklerinden bulunur. O halde,

$$N(z) = \sum_{l=0}^{N'} a(l)(z^{\ell} \pm z^{-\ell}) \tag{10.20}$$

polinomunun kökleri $H(z)$'nin sıfırlardır. z yerine z^{-1} konulursa (10.20)'den

$$\begin{aligned} N(z^{-1}) &= \sum_{l=0}^{N'} a(\ell)(z^{-\ell} \pm z^{\ell}) \\ &= \pm \sum_{\ell=0}^{N'} a(\ell)(z^{\ell} \pm z^{-\ell}) = \pm N(z) \end{aligned} \tag{10.21}$$

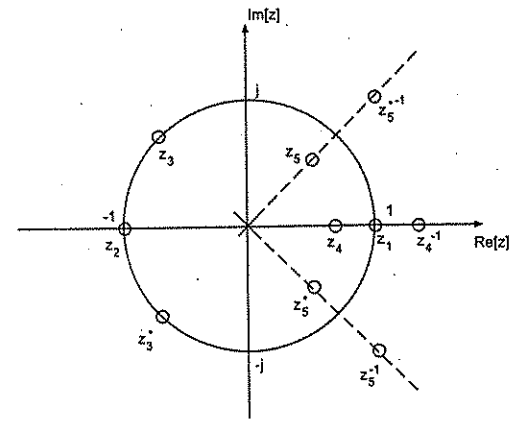
olduğu bulunur. (10.21)'deki özellikten kolaylıkla gösterilebilir ki, eğer $z_i = r_i e^{j\theta_i}$ $H(z)$'nin bir sıfırı ise, $z_i^{-1} = \frac{1}{r_i} e^{-j\theta_i}$ de $H(z)$'nin bir sıfırı olmak zorundadır. Yani, sıfırlar resiprokal çiftler biçiminde oluşmaktadır. Sabit grup gecikmeli bir FIR süzgecin sıfır-kutup diyagramı Şekil 10.3'te görülmektedir.

Açıklama 10.2 Doğrusal fazlı süzgeçleme işleminde, (10.1)'deki transfer fonksiyonu gerçekleştirilirken (10.9)'da verilen simetri özelliği dikkate alınırsa çarpma sayısı ($N/2$) azaltılabilir. Zaman ve donanım açısından, çarpma işlemi toplama işlemine göre çok daha pahalıdır. Doğrusal FIR süzgeçlerin bu özelliği çok önemlidir. Bu durum Şekil 10.4'teki blok diyagramında görülmektedir.

10.3 FIR SÜZGECİN AVANTAJLARI

Bu bölümün amacı FIR süzgecin tasarım yöntemlerini incelemektir. Ancak, önce FIR süzgeci önemli yapan nedenleri tartışmak gerekmektedir. Bu nedenleri şöyle sıralayabiliriz:

1. FIR süzgeçler tam olarak doğrusal fazlı ve önceden belirlenmiş genlik frekans karakteristiğini sağlayacak şekilde kolaylıkla tasarlanabilirler. Buna ek olarak herhangi bir frekans karakteristiğini (hem faz hem de genlik) FIR süzgeçler yaklaşık olarak sağlayabilirler.



Şekil 10.3 Sabit grup gecikmeli bir FIR süzgeçte sıfır ve kutupların z-düzleminde gösterilimi.

2. FIR süzgeçler hem özyineli hem de özyinesiz (nonrecursive) olarak gerçekleştirilebilir. Özyineli gerçekleştirilmede tarak süzgeci ve rezonatör bankası kullanılır. Özyinesiz gerçekleştirmede ise, doğrudan konvolüsyon veya HFD kullanılarak hızlı konvolüsyon yöntemlerinden faydalanılır.

3. Özyinesiz olarak gerçekleştirilen bir FIR süzgeç daima kararlıdır. Bu tür süzgeçlerin z-düzleminde sadece sıfırları olup kutupları olmadığından daima kararlıdırlar.

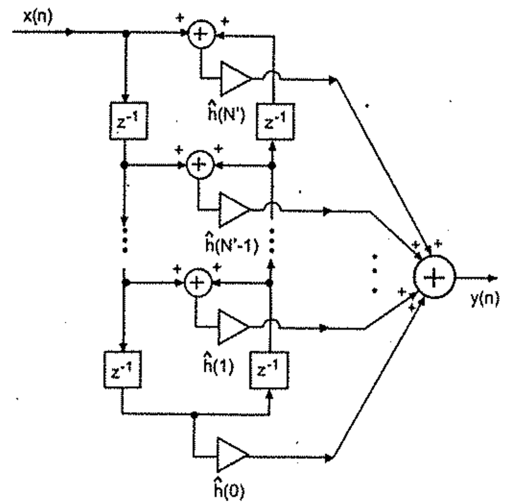
4. FIR süzgeçlerin gerçekleştirilmesinde doğal olarak kuvantalama ve yuvarlatma hataları ortaya çıkar. Ancak, FIR süzgeçlerin özyinesiz gerçekleştirilmelerinde bu hatalar önemsizdir.

5. Keskin kesim frekanslı FIR süzgeç tasarımında süzgeç katsayılarından gelen doğruluk problemi önemlidir. Ancak, benzer özelliklere sahip FIR süzgeç için katsayı hataları daha az önemlidir.

Açıklama 10.3 Yukarıda kullanılan özyineli ve özyinesiz gerçekleştirme terimlerini açıklayalım.

a) Özyineli gerçekleştirme: Bu terim süzgecin (FIR ve IIR) gerçekleştirme tipini ifade eder. Süzgecin çıkışı $y(n)$, özyineli gerçekleştirmede

$$y(n) = f(y(n-1), y(n-2), \ldots, x(n), x(n-1), \ldots)$$



Şekil 10.4 Simetrik impuls cevaplı doğrusal fazlı FIR süzgecin gerçekleştirilmesi.

olarak yazılabilir. Yani n anındaki süzgeç çıkışı $y(n)$, geçmişteki süzgeç çıkışları ($y(n-1)$, $y(n-2)$, ...) ve şimdiki ve geçmişteki süzgeç girişleri ($x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$, ...) cinsinden ifade edilebilir.

b) Özyinesiz gerçekleştirme: Bu terim $y(n)$ süzgeç çıkışının sadece o andaki ve geçmişteki süzgeç girişleri cinsinden elde edileceğini ifade etmektir. Özyinesiz gerçekleştirme

$$y(n) = f(x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots)$$

olarak yazılabilir.

Bu terimlerin kullanılmasının amacı FIR süzgeçler gibi IIR süzgeçlerin de hem özyineli hem de özyinesiz olarak gerçeklenebileceğini göstermektir. Ancak IIR süzgeçler için genellikle özyineli gerçekleştirme, FIR süzgeçler içinse özyinesiz gerçekleştirme kullanılır. O halde süzgeç tipini belirten terim, süzgecin nasıl gerçeklendiğini gösteren terimden ayrı olacaktır.

10.4 FOURİER SERİSİ METODU

Bir süzgeç, frekans domenindeki frekans cevabı $H(e^{j\Omega})$, $|\Omega| \leqslant \pi$ ile belirlenir. Bu frekans cevabı, Ω sayısal frekansının periyodik bir fonksiyonu olup periyodu

2π'dir. Periyodik $H(e^{j\Omega})$ Fourier serisi olarak yazılabilir [4].

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\Omega} \qquad (10.22)$$

O halde, istenen frekans cevabına karşı düşen ideal impuls cevabı

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega})e^{jn\Omega}d\Omega \qquad (10.23)$$

ifadesinden bulunabilir. (10.22) denkleminde $e^{j\Omega} = z$ değişimi yapılırsa frekans cevabına karşı düşen süzgecin transfer fonksiyonu,

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \qquad (10.24)$$

elde edilir. Ancak (10.24)'deki süzgeç sonsuz uzunlukta olup nedensel değildir. Sonlu uzunlukta süzgeç için, (10.24)'deki seri

$$h(n) = 0, \quad |n| > N' = \frac{N-1}{2} \qquad (10.25)$$

kabul edilerek kesilebilir. Bu durumda,

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^{N'} \left[h(-n)z^{n} + h(n)z^{-n}\right] \qquad (10.26)$$

bulunur.

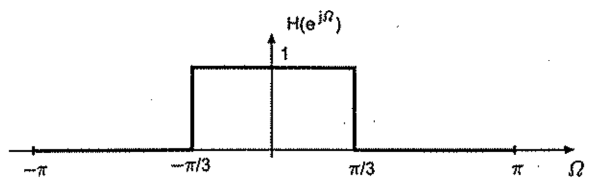
$H(z)$'nin $z^{-N'}$ ile çarpılması yoluyla nedensellik sağlanabilir.

$$H'(z) = z^{-N'}H(z) \qquad (10.27)$$

Bu gecikme yardımı ile bulunan $H'(z)$ süzgecinin genlik cevabı $H(z)$'nin aynıdır. Sadece grup gecikmesi $N'T$ kadar artacaktır.

Örnek 10.1 Kesim frekansı $\Omega_c = (\pi/3)$ olan ideal bir alçak geçiren FIR süzgeci, $N = 23$ için Fourier serisi yöntemi ile tasarlayalım. İstenen süzgecin frekans cevabı

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leqslant \dfrac{\pi}{3} \\ 0 & \dfrac{\pi}{3} < |\Omega| \leqslant \pi \end{cases} \qquad (10.28)$$



Şekil 10.5 Kesim frekansı $\Omega_c = \pi/3$ radyan olan ideal alçak geçiren süzgecin karakteristiği.

olarak yazılabilir. Şekil 10.5'te süzgecin frekans karakteristiği görülmektedir. O halde, (10.23)'den

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} e^{jn\Omega}d\Omega = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & n = 0 \\ \dfrac{\sin(n\pi/3)}{n\pi} & n \neq 0 \end{cases} \tag{10.29}$$

bulunur. (10.29)'daki impuls cevabı sonsuz uzunluktadır. Sonlu uzunlukta bir FIR süzgeç elde etmek için impuls cevabı istenilen $N' = (N-1)/2{=}11$ teriminde kesilir. Bunun sonucu, (10.28)'eki frekans karakteristiğini *yaklaşık* olarak sağlayan süzgecin transfer fonksiyonu,

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^{11} h(n)(z^n + z^{-n}) \tag{10.30}$$

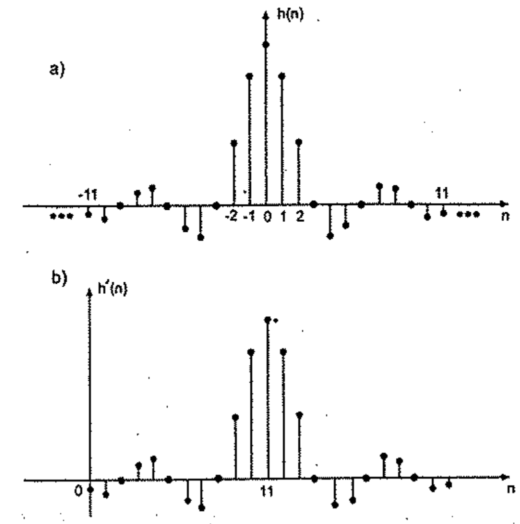
olarak bulunur. Burada bulunan $h(n)$ impuls cevabının simetrik olma özelliği dikkate alınmıştır. Şimdi, (10.30)'da verilen nedensel olmayan süzgecin gerçeklenebilir olması için, z^{-11} gecikme elemanı ile çarpılarak nedensel $H'(z)$ transfer fonksiyonu elde edilir. Yani,

$$H'(z) = z^{-11}H(z) = \sum_{n=0}^{22} h'(n)z^{-n} \tag{10.31}$$

yazılabilir. Burada, nedensel süzgecin impuls cevabı $h'(n)$ (10.29)'dan

$$h'(n) = h(n-11) = \frac{\sin(n-11)\pi/3}{(n-11)\pi}; \quad 0 \leqslant n \leqslant 22 \tag{10.32}$$

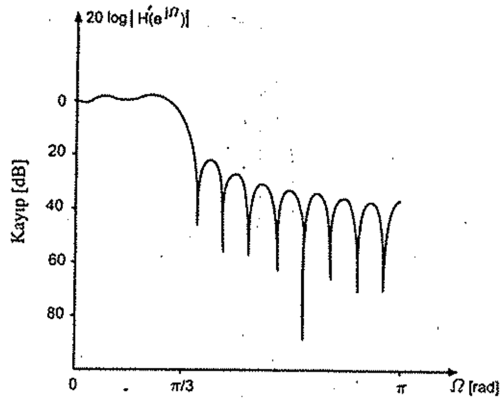
olarak bulunur. Ayrıca, Şekil 10.6'da $h(n)$ ve $h'(n)$ görülmektedir.



Şekil 10.6 Alçak geçiren süzgecin impuls cevabı: a) (10.29)'da verilen ideal sonsuz uzunluklu iki taraflı dizinin gösterilimi; b) Sonlu uzunlukta ($N = 23$) tasarlanan FIR süzgecin impuls cevabı.

Tasarlanan nedensel süzgecin genlik cevabı Şekil 10.7'de görülmektedir. İstenilen süzgecin (10.28)'de verilen frekans karakteristiğinde, $\Omega = \pi/3$ frekansında yer alan süreksizlikten dolayı bu kesim frekansı civarında salınımlı bir durum (Gibbs kavramı) ortaya çıkmaktadır. Tablo 7.1'deki pencere fonksiyonlarından biri kullanılarak Gibbs salınımları giderilebilir. Sonraki bölümde bu yöntem incelenecektir.

Açıklama 10.4 Şekil 10.7'de sayısal süzgecin genlik cevabı [dB] olarak verilmiştir. Bu logaritmik gösterilimde $|H(e^{j\Omega})|$ yerine, $20\log_{10}|H(e^{j\Omega})|$ fonksiyonu çizdirilir. Böylece genlik cevabındaki düşük değerli salınımlar daha rahat gözlenebilir. Bir süzgecin 3-dB kesim frekansı genlik cevabının maksimum değerine göre -3dB azaldığı frekanstır.



Şekil 10.7 Dikdörtgen pencere kullanılarak tasarlanan alçak geçiren FIR süzgecin frekans cevabı ($N = 23$).

10.5 PENCERE FONKSİYONU KULLANIMI

Gibbs osilasyonlarını azaltmak için kolaylıkla uygulanabilen yöntem pencere fonksiyonları kullanımıdır [5]. Bölüm 7'de AFD konusu incelenirken pencere fonksiyonları tartışıldığından burada tekrar edilmeyecektir. Burada pencerelemenin etkisi ayrıntılı olarak gösterilecektir.

Pencere fonksiyonu kullanarak Gibbs salınımlarının azalması daha geniş geçiş bandı oluşturulması ile mümkün olmaktadır. Buna göre, $w(n)$ Tablo 7.1'deki pencere fonksiyonlarından biri ise, z-dönüşümü

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n)z^{-n} \tag{10.33}$$

olarak yazılabilir. Sonsuz uzunlukta bir süzgecin pencerelenmesi sonucu bulunan süzgecin transfer fonksiyonu

$$H_w(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n)h(n)z^{-n} \tag{10.34}$$

olur. Pencerelenmiş süzgecin transfer fonksiyonu $H_w(z)$ ile $H(z)$ ve $W(z)$ arasındaki ilişki (3.37)'deki karmaşık konvolüsyon ile gösterilebilir.

$$H_w(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} H(v)W(\frac{z}{v})v^{-1}dv \tag{10.35}$$

Γ, $H(v)$ ve $W(z/v)$ nin ortak yakınsaklık bölgesi içindeki bir konturu göstermektedir. $v = e^{j\lambda}$ ve $z = e^{j\Omega}$ konularak, ve $H(v)$ ve $H(z/v)$ nin v-düzlemindeki

birim daire üzerinde yakınsak olduğu varsayılarak (10.35) ilişkisi

$$H_w(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\lambda})W(e^{j(\Omega-\lambda)})d\lambda \tag{10.36}$$

biçiminde yazılabilir. Bu konvolüsyon integralinin etkisini gösterebilmek için sonsuz uzunluktaki süzgecin frekans cevabı

$$H(e^{j\lambda}) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant |\lambda| \leqslant \lambda_c \\ 0 & \lambda_c < |\lambda| \leqslant \pi \end{cases} \tag{10.37}$$

olarak verilsin. $W(e^{j\lambda})$ ise gerçel olup Şekil 10.8(b)'deki gibi olsun. Burada pencere fonksiyonunun sonlu bant genişlikli olduğunu varsaymaktayız. Yani,

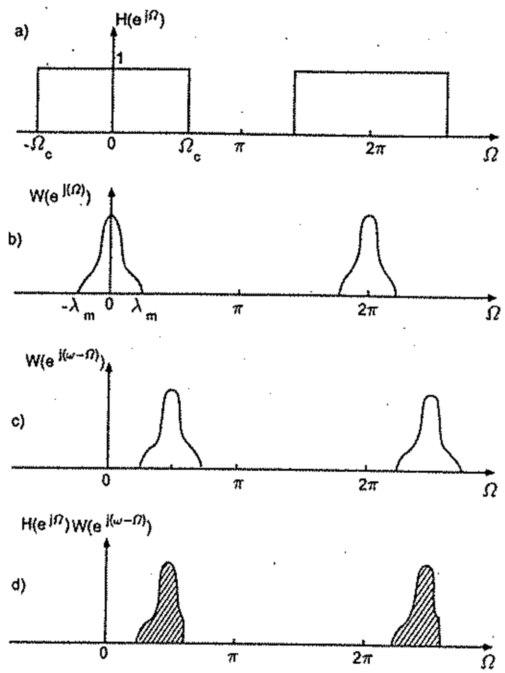
$$W(e^{j\lambda}) = 0 \quad \lambda_m \leqslant |\lambda| \leqslant \pi \tag{10.38}$$

(10.36) ifadesindeki konvolüsyon, yani $H_w(e^{j\Omega})$, aşağıdaki grafiksel yorum yardımı ile bulunur.

1. Şekil 10.8(c)'de görüldüğü gibi $W(e^{j\lambda})$ sağa doğru Ω kadar kaydırılır.
2. Şekil 10.8(d)'deki gibi $H(e^{j\Omega})$ ve $W(e^{j(\Omega-\lambda)})$ çarpılır.
3. Şekil 10.8(d)'deki alan hesaplanır.

$H(e^{j\lambda})$'nın süreksizliğini kapsayacak biçimde Ω'yı Ω_1'den Ω_4'e kadar değiştirerek Şekil 10.9'daki gibi $H_w(e^{j\Omega})$ belirlenebilir. Açık olarak, (10.37) denkleminin sağlanması ve Şekil 10.8(b)'deki pencere spektrumu altındaki alanın bire eşit olması durumunda elde edilen $H_w(e^{j\Omega})$ fonksiyonu $H(e^{j\Omega})$'nın çok yakın bir yaklaşığıdır. Ayrıca, Gibbs osilasyonları bulunmayacaktır.

Açıklama 10.5 Pencere fonksiyonlarının zaman ve frekans domenlerindeki grafikleri Tablo 7.1'de gösterilmiştir. Zaman domenindeki ortak özelliklerine bakılacak olursa iki önemli özelliği görülecektir. Tek N için, pencere fonksiyonu $|n| \geqslant (N-1)/2$ için sıfır ve $n = 0$ örnek noktasına göre simetriktir. Çeşitli pencerelerin zarfları Şekil 10.10'da gösterilmiştir. Tablo 7.1'de pencere fonksiyonlarının dB ölçeğine göre genlik spektrumları görülmektedir. Bu spektrumlar $N' = 10$ için aynı grafik üzerinde tekrar gösterilirse yine bazı ortak özellikler gözlenecektir. Şekil 10.11'den de görüleceği üzere tüm pencerelerde esas lobun genişliği sınırlıdır. Buradan (10.38) varsayımının yaklaşık olarak sağlandığı ortaya çıkmaktadır. Konvolüsyon işleminde yan lobların etkisi dikkate alınmamıştır. Ancak pencere fonksiyonunun yan loblarının tasarlanan süzgecin



Şekil 10.8 (10.36)'daki kompleks konvolüsyonunun grafiksel gösterilimi. d)'deki taralı alan ω noktasındaki kompleks konvolüsyonun integralinin sonucudur.

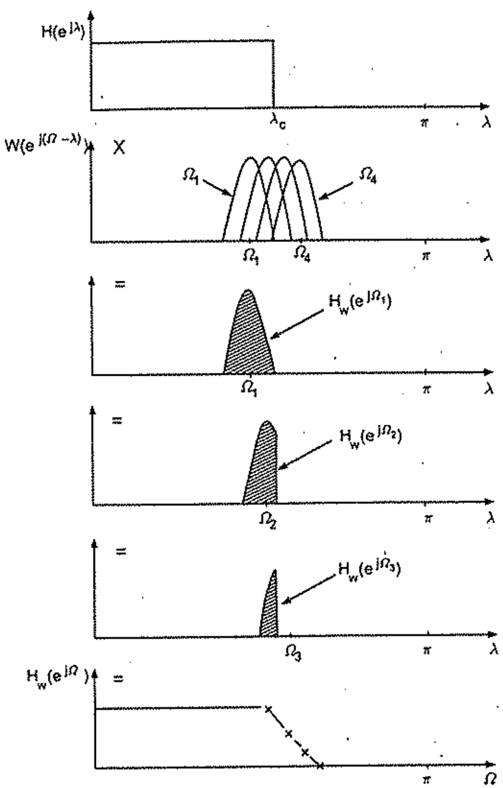
genlik spektrumu üzerinde bir miktar Gibbs osilasyonuna neden olması kaçınılmazdır. Bu nedenle geçirme bandı içerisinde küçük dalgalanma ve durdurma bandında büyük zayıflama için yan loblar altında kalan alan, esas lobdakine oranla küçük olmalıdır.

Örnek 10.2 Örnek 10.1'de verilen özelliklerde bir alçak geçiren süzgeci Hamming pencere fonksiyonu kullanarak tasarlayalım.

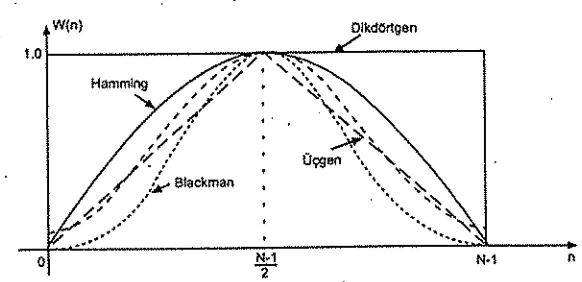
Süzgeç uzunluğu $N = 23$ için Hamming penceresi şöyle yazılır.

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos(\pi n/11) & 0 \leqslant |n| \leqslant 11 \\ 0 & |n| > 11 \end{cases} \quad (10.39)$$

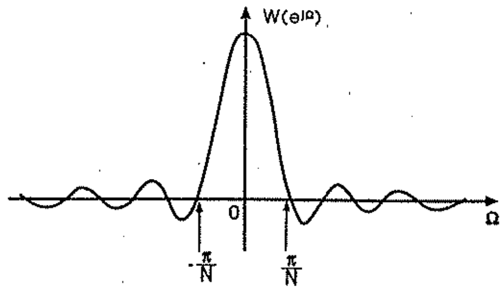
Şimdi, bulunulması istenilen ideal frekans cevaplı süzgecin sonsuz uzunluktaki impuls cevabını yukarıdaki Hamming penceresi ile çarparak kısaltalım; yani sonlu uzunlukta bir impuls cevabına dönüştürelim. Örnek 10.1'de kul-



Şekil 10.9 Pencere fonksiyonunun süreksizlik bölgesindeki etkisi. Taralı alan integralin sonucunu göstermektedir.



Şekil 10.10 FIR süzgeç tasarımında kullanılan pencereler.



Şekil 10.11 Pencere fonksiyonunun tipik bir spektrumu.

lanılan kesme yöntemi dikdörtgen pencerelemeydi. Burada ise kesme yapılırken pencere içinde kalan terimler birle değil, (10.39) denklemindeki değerlerle çarpılarak bulunmaktadır. O halde, Hamming penceresiyle pencerelenmiş impuls cevabı

$$h_w(n) = h(n)w(n) \tag{10.40}$$

olur. (10.29) ve (10.39)'dan

$$h_w(n) = \begin{cases} 1/3 & n = 0 \\ \left[\dfrac{\sin(n\pi/3)}{n\pi}\right][0.54 + 0.46\cos(\pi n/11)] & 0 < |n| \leqslant 11 \\ 0 & |n| > 11 \end{cases} \tag{10.41}$$

yazılabilir. (10.41)'de verilen pencerelenmiş impuls fonksiyonundan nedensel olmayan süzgecin transfer fonksiyonu

$$H_w(z) = \sum_{n=-11}^{11} h_w(n) z^{-n} \tag{10.42}$$

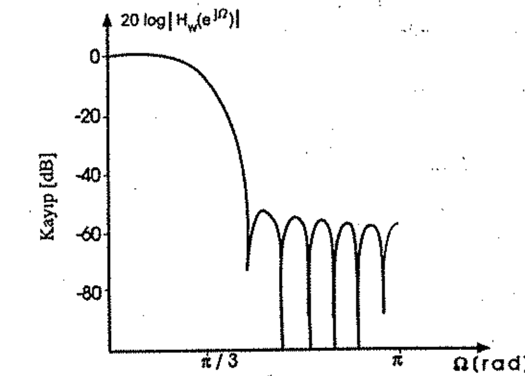
olur. Bu süzgeci nedensel yapabilmek için $H_w(z)$, z^{-11} gecikme elemanı ile çarpılır. O halde, nedensel FIR süzgecin transfer fonksiyonu

$$H'_w(z) = \sum_{n=0}^{22} h'_w(n) z^{-n} \tag{10.43}$$

olarak bulunur. Burada,

$$h'_w(n) = h_w(n - 11)$$

olur.



Şekil 10.12 Hamming pencere fonksiyonu kullanılarak tasarlanan alçak geçiren FIR süzgecin frekans cevabı ($N = 23$).

Tasarlanan FIR süzgecin genlik cevabı Şekil 10.12'de görülmektedir. Katsayıların pencerelenmesi sonucu elde edilen frekans cevabında daha önce görülen Gibbs salınımları oldukça azalmıştır. Buna karşılık geçiş bandı pencereleme öncesi kadar keskin değildir. Yani, geçiş bandı genişlemiştir. Bu örnekten de görülebileceği üzere, pencereleme yöntemiyle FIR süzgeç tasarımında kullanılacak pencerenin iki önemli özelliği vardır; $W(e^{j\Omega})$ için esas frekans lobu genişliği ve $W(e^{j\Omega})$ için yan frekans loblarının en büyük genliği. İdeal olarak istenen esas frekans lobu genişliğinin az olması ve yan lob tepe genliğinin düşük olmasıdır. Böylece tasarlanan süzgeç için geçiş aralığı daralacak ve durdurma bandındaki zayıflatma yüksek olacaktır. Ancak sabit bir pencere uzunluğu için bu iki özellik arasında bir denge vardır ve her ikisi aynı anda optimize edilemez. Yani bir özelliği iyileştirmek için diğerinden feragat etmek gerekmektedir. Böylece pencere tasarımı istenen süzgeç özelliklerine ve spesifikasyonlarına göre şekillenmektedir. Pencere tasarımında izlenecek bazı ana kurallar aşağıda verilmiştir.

1. Pencere uzunluğu arttıkça esas frekans lobu daralır. Böylece tasarlanacak süzgeç için geçirme ve durdurma bantları arasındaki geçiş bandı kısalır. Pencere uzunluğu ve geçiş bandı uzunluğu arasında c bir sabit olmak üzere yaklaşık olarak aşağıda verilen ilişki vardır.

$$N\Delta\Omega = c$$

2. Pencere yan lob tepe genliğini genel olarak pencerenin tipi belirlemektedir ve bu genlik pencere uzunluğundan bağımsızdır.

Tablo 10.1 Sık kullanılan pencere fonksiyonları için karakteristikler.

Pencere	Yan lob genliği	Geçiş bandı ($\Delta\Omega$)	Durdurma bandında min. zayıflama
Dikdörtgen	-13 dB	$\frac{1.8\pi}{N}$	-21 dB
Hamming	-41 dB	$\frac{6.6\pi}{N}$	-53 dB
Hanning	-31 dB	$\frac{6.2\pi}{N}$	-44 dB
Blackman	-57 dB	$\frac{11\pi}{N}$	-74 dB

3. Pencere biçimi yan lob tepe genliğini azaltacak şekilde değiştirildiğinde genel olarak esas lob genişliği artacaktır.

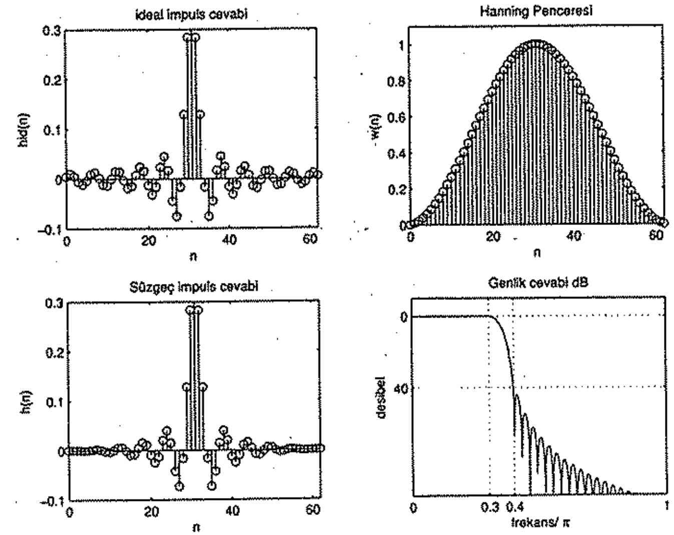
Tablo 10.1'de çeşitli pencere fonksiyonları için N uzunluklu FIR süzgeç tasarımında kullanılabilecek karakteristikler verilmiştir. Tabloda, herbir pencere fonksiyonu için yan lob tepe genlikleri, ve bu pencere kullanılarak tasarlanan süzgeç için yaklaşık geçiş bandı uzunlukları ve minimum durdurma bandı zayıflatması verilmektedir.

Örnek 10.3 MATLAB kullanarak aşağıda verilen spesifikasyonlara sahip FIR süzgeci pencereleme yöntemiyle tasarlayalım.

$\Omega_p = 0.3\pi$, $\Omega_p = 0.4\pi$, durdurma bandında minimum zayıflatma 40 dB.

Çözüm. Tablo 10.1'e bakarak 40 dB zayıflatmayı sağlayan süzgeçler arasında en kısa geçiş bandına sahip olanın Hanning penceresi olduğunu görüyoruz. Tasarımda bu pencereyi kullanalım. Aşağıda verilen MATLAB programı gerekli adımları göstermektedir. Şekil 10.13 tasarım sonucu elde edilen süzgecin impuls ve genlik cevaplarını vermektedir. Görüldüğü üzere süzgeç istenen zayıflatmayı ve geçiş bandını sağlamaktadır.

```
clear all; close all;
Wp = 0.3*pi; Ws = 0.4*pi;
gecis_bandi = Ws - Wp;   % gecis bandi uzunlugu
```

Şekil 10.13 Hanning pencere fonksiyonu kullanılarak tasarlanan alçak geçiren FIR süzgecin impuls ve genlik cevabı.

```
% Tablo 10.1 kullanilarak hesaplanan gereken pencere uzunlugu
N = ceil(6.2*pi/gecis_bandi) + 1;
Nhat=(N-1)/2;
n=[0:1:N-1];
m=n-Nhat;
Wc = (Ws+Wp)/2;
hid = Wc/pi*sinc(Wc*m/pi); % sınırlandırılmış ideal impuls cevabı
w_hann = (hanning(N))';    % Hanning pencere fonksiyonu
h = hid .* w_hann;         % süzgeç impuls cevabı
[H,w]=freqz(h,[1],1000,'whole');
H=(H(1:501))';w=(w(1:501))';
mag=abs(H);
dB_mag=20*log10((mag+eps)/max(mag));
subplot(1,1,1)
subplot(2,2,1); stem(n,hid); title('ideal impuls cevabi')
axis([0 N-1 -0.1 0.3]); xlabel('n'); ylabel('hid(n)')
subplot(2,2,2); stem(n,w_hann);title('Hanning Penceresi')
axis([0 N-1 0 1.1]); xlabel('n'); ylabel('w(n)')
subplot(2,2,3); stem(n,h);title('Süzgeç impuls cevabi')
```

```
axis([0 N-1 -0.1 0.3]); xlabel('n'); ylabel('h(n)')
subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB_mag);title('Genlik cevabi dB');grid
axis([0 1 -100 10]); xlabel('frekans/ \pi'); ylabel('desibel')
```

□

10.6 FREKANS ÖRNEKLEME METODU

Verilen herhangi bir frekans cevabına karşı düşen impuls cevabı (10.23) ifadesi ile hesaplanır. Ancak, klasik olmayan bir süzgeç spesifikasyonu $H(e^{j\Omega})$ için, impuls cevabı $h(n), |n| \leqslant N'$ nin (10.23) yardımıyla hesaplanması oldukça fazla işlem gerektirir. Böyle durumlarda, ideal impuls cevabı $h(n)$'yi bulmaksızın sadece $H(e^{j\Omega})$ değerlerini kullanabilen bir tasarım yöntemi daha uygundur. Bu bölümde tartışılacak yöntem $H(e^{j\Omega})$'nın $(0, 2\pi)$ aralığında eşit aralıklarla örneklenmesine dayalıdır. Ayrık-Fourier dönüşümünün (AFD) bir uygulaması olan bu teknik, frekans domeninde örnekleme ilgilidir.

İstenilen süzgecin frekans cevabı $H(e^{j\Omega})$'nın $(0, 2\pi)$ frekans aralığında N eşit aralıklı Ω_k frekans noktalarındaki değerleri $\{H_k\}_{k=0}^{N-1}$ ile gösterilsin. Tasarlanmak istenen sınırlı impuls cevabı $h(n)$, ters ayrık-Fourier dönüşüm ilişkisi ile elde edilir:

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ &= \text{ters}AFD[H_k] \end{aligned} \tag{10.44}$$

Burada,

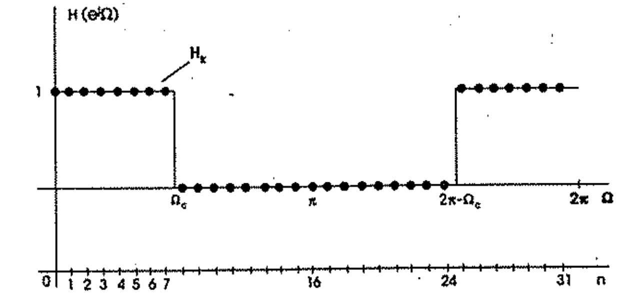
$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \tag{10.45}$$

olarak tanımlandığını Bölüm 7'de görmüştük.

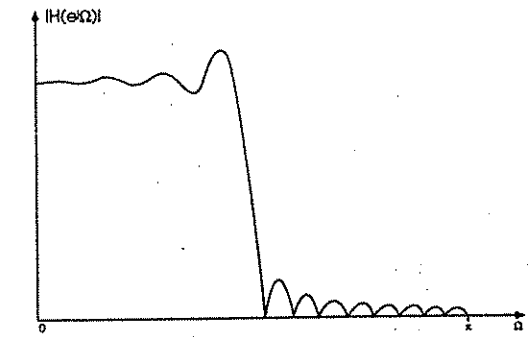
Yukarıdaki tasarım tekniği frekans örnekleme metodu olarak bilinir ve prensip olarak çok basittir. Bu metod iki aşamalı olarak şöyle özetlenebilir:

1. Süzgecin frekans cevabının eşit aralıklı N örneğinin seçimi.
2. Bu frekans örneklerinin ters AFD'sinin bulunması.

Seçilen frekans örnekleri arasındaki frekans cevabını tahmin etmek mümkün olmadığı için bu direkt yöntemin pratikte uygulama olanağı yoktur. Çünkü frekans cevabının frekans örnekleri arasındaki değişimi uygulamaların çoğu için uygun değildir. Bölüm 6.3'te tartışıldığı üzere frekans domeninde örnekleme, zaman domeninde örtüşmeye neden olmaktadır. Yani, (10.44) ifadesiyle elde



Şekil 10.14 İdeal alçak geçiren süzgecin frekans örnekleri ($N = 32$).



Şekil 10.15 Şekil 10.14'deki frekans örneklerine karşı düşen süzgecin frekans cevabı.

edilen sonlu impuls cevabı, sonsuz uzunluktaki ideal cevabının örtüşmesiyle oluşmaktadır. Şekil 10.14'te ideal alçak geçiren süzgeç için alınan frekans örnekleri görülmektedir. Bu frekans örnekleri için tasarlanan süzgecin frekans cevabı Şekil 10.15'te verilmektedir. İnterpolasyonlu frekans cevabında örnek alınan noktalarda seçilen değerler bulunmasına karşılık örnekler arasında bir dalgalanma olmaktadır. Özellikle süreksizlik noktalarında Gibbs kavramı açık bir şekilde görülmektedir.

Tasarlanan süzgecin frekans cevabında görülen bu düzensizlikleri düzeltmeye yarayan metodları incelemeden önce frekans örnekleme yöntemiyle tasarlanan süzgecin transfer fonksiyonunu bulalım. Ayrıca, gerçel impuls cevaplı doğrusal fazlı süzgecin tasarımı için gerekli koşulları belirleyelim. (10.44)'de görüldüğü gibi N tane frekans örneği $\{H_k\}_{k=0}^{N-1}$ seçimi, N impuls örneğine $\{h(n)\}_{n=0}^{N-1}$ karşı düşmektedir. Tasarımın hareket noktası burasıdır. Buradan, bulunan süzgecin z-dönüşümünü H_k'nın fonksiyonu olarak elde etmek mümkündür. Gerçekten, transfer fonksiyonu olan

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \tag{10.46}$$

ifadesinde $h(n)$ yerine (10.44)'ten H_k'nın fonksiyonu konulabilir.

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1}\left[(1/N)\sum_{k=0}^{N-1} H_k W_N^{-kn}\right] z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}(H_k/N)\sum_{n=0}^{N-1}\left[W_N^{-k}z^{-1}\right]^n \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}(H_k/N)\frac{1-W_N^{-Nk}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \\ &= \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_k}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \end{aligned} \tag{10.47}$$

Süzgecin frekans cevabı, z^{-1} yerine $e^{-j\Omega}$ konularak elde edilir.

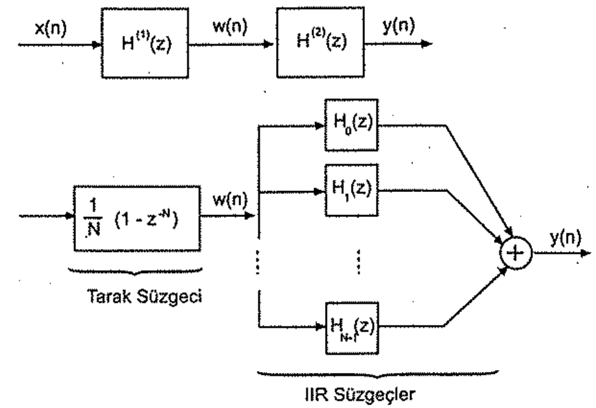
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1-e^{jN\Omega}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_k}{\left[1-e^{-j\Omega}W_N^{-k}\right]} \tag{10.48}$$

(10.45)'den $W_N^{-k} = e^{j(2\pi/N)k}$ yazılarak

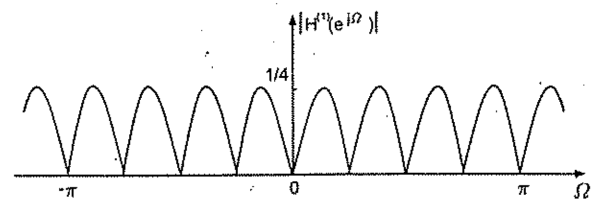
$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \frac{1-e^{-jN\Omega}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_k}{\left[1-e^{-j\Omega}e^{j(2\pi/N)k}\right]} \\ &= \frac{e^{-j(N\Omega/2)}\left[e^{j(N\Omega/2)}-e^{-j(N\Omega/2)}\right]}{N} \\ &\times \sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_k}{e^{-j(\Omega/2)}e^{j(\pi/N)k}\left[e^{j(\Omega/2)}e^{-j(\pi/N)k}-e^{-j(\Omega/2)}e^{j(\pi/N)k}\right]} \\ &= \frac{e^{-j\Omega(N-1)/2}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_k e^{-j(\pi/N)k}\sin(N\Omega/2)}{\sin\left[(\Omega/2)-(\pi/N)k\right]} \end{aligned} \tag{10.49}$$

10.6.1 Süzgeç Transfer Fonksiyonun Gerçekleştirilmesi

(10.47) denkleminin, süzgecin z-dönüşümünü frekans örneklerinin fonksiyonu cinsinden ifade etmesi çok ilginçtir. Gerçekten, bu ifade yardımıyla FIR süzgeç ardışıl bağlı iki süzgeç ile gerçeklenebilir. Şekil 10.16'da bu süzgecin blok



Şekil 10.16 Frekans örnekleme metodu ile tasarlanan süzgecin gerçekleştirilmesi. $H^1(z)$ tarak süzgecini ve $H^2(z)$ paralel bağlı N adet birinci derece FIR süzgeci göstermektedir.



Şekil 10.17 $N = 8$ için tarak süzgecin frekans cevabı.

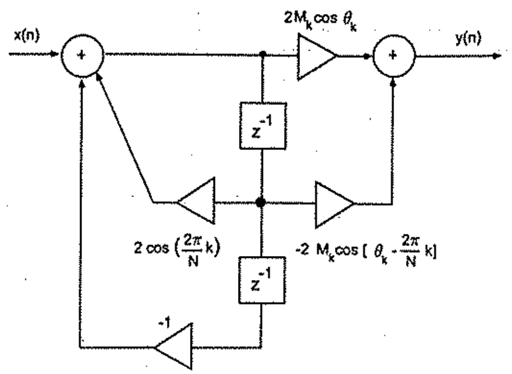
diyagramı görülmektedir. Bu süzgeçlerden tarak (comb) süzgeci olarak da adlandırılan birincisi FIR tipindedir. Transfer fonksiyonu

$$H^{(1)}(z) = \frac{1}{N}(1-z^{-N}) \tag{10.50}$$

olarak yazılabilir. $H^{(1)}(z)$'nin $z_k = e^{j(2\pi/N)k}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ noktalarında yani, birim daire üzerinde N adet sıfırı vardır. (10.50)'den fark denklemi

$$y(n) = \frac{1}{N}x(n) - \frac{1}{N}x(n-N) \tag{10.51}$$

olarak verilir. $N = 8$ için tarak süzgecinin frekans cevabı Şekil 10.17'de görülmektedir. Ardışıl bağlı ikinci süzgeç ise, paralel bağlı N adet birinci derece IIR



Şekil 10.18 (10.54)'te verilen ikinci derece sistemin gerçekleştirilmesi.

süzgeçten oluşmaktadır. Transfer fonksiyonu için

$$H^{(2)}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \tag{10.52}$$

yazılabilir. Herbir IIR süzgecin transfer fonksiyonu

$$H_k(z) = \frac{H_k}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \tag{10.53}$$

olur. $H_k(z)$'nin $p_k = e^{j(2\pi/N)k}$ noktasında bir kutbu vardır. $H^{(2)}(z)$ gerçel katsayılı bir transfer fonksiyonu olduğu için $H_k(z)$'ye karşı düşen diğer bir paralel bölümde de ($p'_k = e^{-j(2\pi/N)k}$'da) bir kutup bulunacaktır. O halde, eşlenik iki parelel bölüm gerçel katsayılı olup fark-denklemi şöyle ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} y(n) = 2M_k\left\{\cos\theta_k x(n) - \cos\left[\theta_k - \frac{2\pi}{N}k\right]x(n-1)\right\} \\ + 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) y(n-1) - y(n-2) \end{aligned} \tag{10.54}$$

Burada $H_k = M_k e^{j\theta_k}$ olup, M_k ve θ_k için Şekil 10.18'de ikinci derece bir sistemin gerçekleştirilmesi gösterilmektedir. (10.54)'te fark denklemi verilen ikinci derece süzgeç sonsuz impuls cevabı olmasına karşılık, tarak süzgeci olan $H^{(1)}(z)$ ile çarpımı sonucu sonlu impuls cevaplı bir süzgeç elde edilmektedir. Bunu (10.51) ve (10.54) yardımıyla açıklamak mümkündür. İkinci derece IIR süzgecin sonsuz impuls cevabı kosinüs fonksiyonun N örneğinden oluşan periyodik bir yapıdadır. Ancak, tarak fonksiyonu ile işlenen herhangi bir ikinci derece

süzgecin impuls cevabı sonlu olmaktadır. Çünkü, $n = 0$ anında uyarılan sistem $n = N - 1$ anına kadar kosinüs fonksiyonu biçiminde impuls cevabı üretir. Ancak, $n = N$ anında tarak süzgecinden dolayı ters yönde bir uyarılma olmakta ve ikinci derece süzgecin önceki osilasyonlarını yok etmektedir.

Açıklama 10.6 Süzgecin (10.47)'deki transfer fonksiyonunun kutuplarının, teorik olarak tarak süzgeci olarak adlandırılan $H^{(1)}(z)$'nin sıfırları ile dengelendiğini göstermiş bulunmaktayız. Ancak, bu sıfırların ve kutupların birim daire üzerinde olmaları nedeniyle sistemde kuvantalama hatalarından kaynaklanan bir kararsızlık görülebilir. Çünkü, sonlu kelime uzunluğu kullanılarak süzgeç katsayılarının kuvantalanması pratikte kutup ve sıfırların yerlerinde küçük farklılıklar ortaya çıkaracaktır. Böylece, birim daireden dışarı çıkan kutuplar kararsızlığa neden olacaktır. Bu durumun önlenebilmesi için, sıfır ve kutupları bir miktar birim dairenin merkezine doğru kaydırmak yeterlidir. Kutupların ve sıfırların birden çok az küçük olan p gibi bir gerçel sayı ile çarpılması sonucu orijine doğru kaydırma işlemi gerçekleştirilir. Ya da eşdeğer olarak transfer fonksiyonunda z yerine z/p konulur. Böylece tasarlanan süzgecin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1 - p^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_k}{1 - W_N^{-k} p z^{-1}}$$

olarak elde edilir. Uygulamada $1 - 10^{-12}$ ve $1 - 10^{-27}$ arasındaki p değerleri ile başarılı sonuçlar elde edilmektedir.

10.6.2 Doğrusal Fazlı FIR Süzgeç Tasarımı

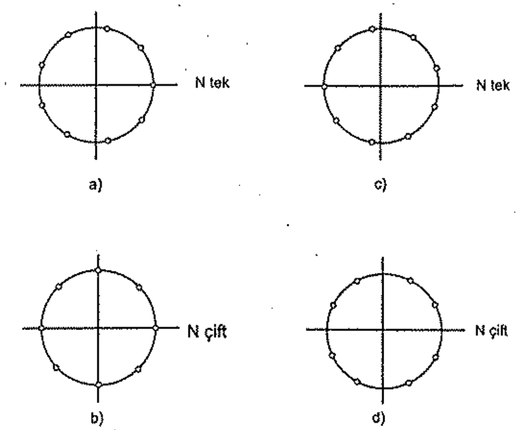
Genel olarak, doğrusal fazlı ve gerçel impuls cevaplı bir FIR süzgeç tasarlamak için frekans örneklerinin $(-\pi, \pi)$ aralığında genlikleri simetrik ve fazları ters simetrik olmak zorundadır. Bu sonuç Fourier dönüşümünün genel kurallarından dolayıdır. Bununla birlikte, ters AFD'nin dönüşüm özelliğinden dolayı bu simetrilerin $(-\pi, \pi)$ aralığı yerine $(0, 2\pi)$ frekans aralığında alınması daha uygundur.

Frekans örneklerinin seçiminde iki farklı durum ele alınabilir:

1. Örnek sayısı N tek veya çift için eşit aralıklı frekans noktaları

$$f_k = \frac{k}{N}; \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{10.55}$$

değerlerindedir. Buna göre, sıfır frekansında bir örnek vardır. Şekil 10.19(a) tek frekans örneklerinin $(0, 2\pi)$ frekans aralığındaki yerlerini göstermektedir. Şekil 10.19(b)'de N çift için örnek yerleri gösterilmektedir.



Şekil 10.19 Farklı frekans örnekleme noktaları.

2. Diğer bir seçimde, N çift veya tek için frekans cevabı örnekleri eşit aralıklı olarak

$$f_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{N}; \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{10.56}$$

noktalarında seçilir. N tek ve çift frekans örnek noktalarının yerleri sırasıyla Şekil 10.19(c) ve Şekil 10.19(d)'de görülmektedir. Bu tip seçimde sıfır frekansında örnek yoktur.

Şimdi, örnek frekans noktalarının (10.55)'deki gibi alındığını ve örnek sayısı olan N'nin tek olduğunu varsayalım. $H_k = |H_k|e^{j\phi_k}$ şeklinde yazılan frekans örneklerinde aşağıdaki simetri olmalıdır. $N' = (N-1)/2$ ise,

$$|H_k| = |H_{N-k}|, \quad k = 0, 1, \ldots, N' \tag{10.57}$$

$$\Psi_k = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}N'k & k = 0, 1, \ldots, N' \\ \frac{2\pi}{N}N'(N-k) & k = N'+1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{10.58}$$

Bu özellikleri (10.49)'da yerine koyalım. Baştaki doğrusal faz terimi atılırsa

süzgecin frekans cevabı

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \frac{|H_0|}{N}\frac{\sin\frac{N\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}} \\ &+ \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N'} \frac{|H_k|e^{-j(2\pi/N)N'k}e^{-j(\pi/N)k}\sin(N\Omega/2)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} \\ &+ \frac{1}{N}\sum_{k=N'+1}^{N-1} \frac{|H_k|e^{-j(2\pi/N)N'(N-k)}e^{-j(\pi/N)k}\sin(N\Omega/2)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} \end{aligned} \tag{10.59}$$

olarak bulunur. İkinci toplam için $m = N - k$ konulursa

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \frac{|H_0|}{N}\frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \\ &+ \sum_{k=1}^{N'} \frac{|H_k|}{N} \frac{e^{-j(2\pi/N)N'k}e^{-j(\pi/N)k}\sin(N\Omega/2)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} \\ &+ \sum_{m=1}^{N'} \frac{|H_{N-m}|}{N} \frac{e^{-j(2\pi/N)N'm}e^{-j(\pi/N)(N-m)}\sin(N\Omega/2)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{N}(N-m)\right)} \end{aligned} \tag{10.60}$$

elde edilir. (10.57)'deki simetri özelliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \frac{|H_k|}{N}\frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \\ &+ \sum_{k=1}^{N'} \frac{|H_0|}{N}\sin(N\Omega/2)\left[\frac{(-1)^k}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} + \frac{(-1)^k}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} + \frac{\pi}{N}k\right)}\right] \end{aligned} \tag{10.61}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\sin(\alpha + k\pi) = \sin(\alpha - k\pi) = (-1)^k \sin\alpha \tag{10.62}$$

trigonometrik ilişkisinden,

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \frac{|H_0|}{N}\frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \\ &+ \sum_{k=1}^{N'} \frac{|H_k|}{N}\left\{\frac{\sin\left[N(\Omega/2) - (k\pi/N)\right]}{\sin\left[(\Omega/2) - (k\pi/N)\right]} + \frac{\sin\left[N(\Omega/2) + (k\pi/N)\right]}{\sin\left[(\Omega/2) - (k\pi/N)\right]}\right\} \end{aligned} \tag{10.63}$$

elde edilir. (10.63)'deki frekans cevabı, tasarım tekniklerinde kullanılmaya uygun formdadır.

Eğer N çift ise, doğrusal faz için simetri koşulları

$$\begin{aligned} |H_k| &= |H_{N-k}|, \quad k = 0,1,\ldots,(N/2)-1 \\ |H_{N/2}| &= 0 \end{aligned} \tag{10.64}$$

ve

$$\Psi_k = \begin{cases} -(2/N)N'k & k = 0,1,\ldots,(N/2)-1 \\ 0 & k = N/2 \\ (2/N)N'(N-k) & k = (N/2)+1,\ldots,N-1 \end{cases} \tag{10.65}$$

olur. (10.64) ve (10.65) ifadelerinde görülen $k = (N/2)$ için genlik ve faz koşulu doğrusal fazdan dolayıdır. Gerçekten N çift için doğrusal fazlı süzgeçte, $\Omega = \pi$ frekansında $H(e^{j\Omega}) = 0$ olmaktadır.

Yukarıdaki simetri koşullarına karşı düşen süzgecin frekans cevabı benzer şekilde

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \frac{|H_0|}{N}\frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \\ &+ \sum_{k=1}^{N/2-1}\frac{|H_k|}{N}\left\{\frac{\sin[N(\Omega/2)-(k\pi/N)]}{\sin[(\Omega/2)-(k\pi/N)]} + \frac{\sin[N(\Omega/2)+(k\pi/N)]}{\sin[(\Omega/2)-(k\pi/N)]}\right\} \end{aligned} \tag{10.66}$$

formunda yazılabilir.

Frekans örnek noktalarının (10.56)'daki gibi seçilmesi durumunda N tek ve çift için frekans örnekleri ile süzgecin impuls cevabı arasındaki ilişki z-dönüşümü tanımından yararlanarak gösterilebilir. Gerçekten, frekans örnekleri $H(z)$'nin birim daire üzerinde (10.56)'da verilen noktalardaki değerleridir.

$$H_k = H(z)|_{z=e^{j2\pi f_k}} \tag{10.67}$$

$$f_k = (k+(1/2))/N; \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Buradan,

$$\begin{aligned} H_k &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j(2\pi/N)(k+(1/2))n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j(\pi/N)n}e^{-j(2\pi/N)kn} \end{aligned} \tag{10.68}$$

yazılabilir. (10.68)'deki frekans örnekleri

$$g(n) = h(n)e^{-j(\pi n/N)} \tag{10.69}$$

tanımıyla oluşan $\{g(n)\}_{n=0}^{N-1}$ dizisinin AFD'si olarak düşünülebilir. Bu nedenle, $\{H_k\}$ frekans örneklerinin ters Fourier dönüşümü $\{g(n)\}$ dizisi olmaktadır.

$$g(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k W_N^{-nk}, \quad n = 0,1,\ldots,N-1 \tag{10.70}$$

(10.69)'dan $h(n)$ impuls cevabı bulunur.

$$h(n) = g(n)e^{j(\pi n/N)} \tag{10.71}$$

Süzgecin transfer fonksiyonu $H(z)$, frekans örneklerinin fonksiyonu olarak özyineli bir yapıda elde edilebilir:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} g(n)e^{(j\pi n/N)}z^{-n} \end{aligned} \tag{10.72}$$

(10.70)'deki $g(n)$ ifadesi yukarıda yerine konularak

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{j(\pi n/N)nk}\right]e^{j(\pi n/N)}z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_k}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j(2\pi/N)(k+(1/2))}z^{-1}\right]^n \\ &= \frac{1+z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_k}{1-e^{j(2\pi/N)(k+(1/2))}z^{-1}} \end{aligned} \tag{10.73}$$

bulunur. Bu durumdaki simetri koşulları tek N için şöyle verilir:

$$|H_k| = |H_{N-1-k}|, \quad k = 0,1,\ldots,N'-1 \tag{10.74}$$

$$\Psi_k = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}N'(k+\frac{1}{2}) & k = 0,1,\ldots,N'-1 \\ 0 & k = N' \\ \frac{2\pi}{N}N'(N-k-\frac{1}{2}) & k = N'+1,\ldots,N-1 \end{cases} \tag{10.75}$$

(10.63)'dekine benzer şekilde, bu durum için süzgecin frekans cevabı (10.74) ve (10.75)'den elde edilir.

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \frac{|H_{N'}|}{N}\frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \\ &+ \sum_{k=0}^{N'-1}\frac{|H_k|}{N}\left\{\frac{\sin\left(N\left[\frac{\Omega}{2}-\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}-\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)} + \frac{\sin\left(N\left[\frac{\Omega}{2}+\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}+\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)}\right\} \end{aligned} \tag{10.76}$$

Bu gösterilimde baştaki doğrusal faz terimi dikkate alınmalıdır.

N çift olması durumunda ise doğrusal faz ve gerçel impuls cevabı için gerekli koşullar aşağıdaki gibi verilir:

$$|H_k| = |H_{N-1-k}|, \quad k = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1 \tag{10.77}$$

$$\Psi_k = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} N'(k + \frac{1}{2}) & k = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1 \\ \frac{2\pi}{N} N'(N - k - \frac{1}{2}) & k = (N/2) + 1, \ldots, N - 1 \end{cases} \tag{10.78}$$

Yine doğrusal faz terimi atılarak, (10.77) ve (10.78) simetri koşulları altında tasarlanan süzgecin frekans cevabı

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=1}^{N'-1} \frac{|H_k|}{N} \left\{ \frac{\sin\left(N\left[\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{N}(k + \frac{1}{2})\right]\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{N}(k + \frac{1}{2})\right)} + \frac{\sin\left(N\left[\frac{\Omega}{2} + \frac{\pi}{N}(k + \frac{1}{2})\right]\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} + \frac{\pi}{N}(k + \frac{1}{2})\right)} \right\} \tag{10.79}$$

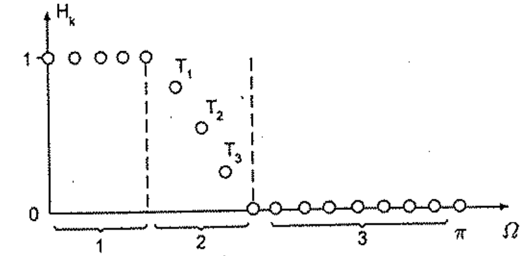
olarak elde edilir.

10.6.3 Tasarımın İyileştirilmesi

(10.63), (10.66), (10.76) ve (10.79) denklemleri, verilen frekans cevabı örnekleri cinsinden tasarlanan süzgecin frekans cevabının yaklaşık ifadesidir. Tam frekans örneklerinde doğru olan bu yaklaşıklık, örnekler arasında genellikle iyi sonuç vermez. Bu bölümde, örnekler arası alanda hatayı azaltmaya yönelik bazı iyileştirme yöntemleri tartışılacaktır.

Alçak geçiren süzgeç tasarımında görüldüğü üzere, yaklaşıklık problemine frekans cevabındaki süreksizlikler neden olmaktadır. Alçak geçiren süzgeç örneğinde süreksizlik geçiş bandının çok dar olmasından kaynaklanır. Gerçekten, bu süzgecin geçirme bandında alınan son örnek bire eşit ve durdurma bandındaki ilk örnek ise sıfıra eşittir. Frekans domenindeki süreksizlik uzun bir impuls cevabına karşı düşmektedir. Bunun sonucu, frekans örneklenmesi yöntemi ile bulunan süzgecin sonlu impuls cevabı zaman domeninde örtüşmeden dolayı hatalıdır. Bu hatanın azaltılması için pencereleme yönteminde olduğu gibi geçiş bandını daha da yumuşatarak süreksizlik giderilebilir. Bu geçiş bandındaki frekans örneklerine 0 ve 1 arasında değerler verilir. Böylece geçirme ve durdurma bantları arasında uzatılmış geçiş bandı oluşturulur.

Şimdi, problem geçiş bandındaki bu örneklerin nasıl seçileceğidir. Bu örnekler, geçirme ve durdurma bandındaki yaklaşıklık hatalarını minimum yapacak biçimde seçilmelidir. Geçiş bandındaki örneklerin değerlerini belirleyecek yaklaşıklık problemi doğrusal programlama problemi olarak formüle edilebilir [6]. Burada, doğrusal programlamanın özellikleri üzerinde durulma-



Şekil 10.20 (T_1, T_2, T_3) değişken katsayıları olan frekans örneklemeli süzgecin frekans cevabı.

yacaktır. Ancak, bu konuda yoğun araştırmalar yapılmış olup etkili yazılım programları geliştirilmiştir.

Şekil 10.14'teki doğrusal fazlı ideal alçak geçiren süzgece ilişkin frekans örneklerini, geçiş bandı dikkate alınarak doğrusal programlama problemi olarak formüle edelim. Şekil 10.20'de gösterildiği gibi $(0, \pi)$ arasındaki sayısal frekans domeni üç bölgeye ayrılmaktadır. Geçirme bandı olarak adlandırılan birinci bölgede frekans cevabı sabit olup bire eşittir. Durdurma bandına karşı düşen üçüncü bölgede frekans cevabı örnekleri sabit olup sıfıra eşittir. İkinci bölge ise geçiş bandına ait bölgedir. Bu bölgede seçilen frekans cevabı örnekleri genliklerinin yaklaşıklık hatasını minimum yapacak şekilde değişimine izin verilir. Şekil 10.20'deki örnekte, geçiş bandı üzerinde T_1, T_2 ve T_3 gibi üç örnek değişken olarak seçilmiştir. Doğrusal fazlı süzgecin frekans cevabını alınan örnekler cinsinden ifade eden (10.63), (10.66), (10.76) ve (10.79) denklemlerinden

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{M} |H_k| S_k(e^{j\Omega}) \tag{10.80}$$

yazılabilir. Burada, $S_k(e^{j\Omega})$ örnekleme tipine göre değişen interpolasyon fonksiyonudur. Bu nedenle (10.80) denklemi, interpolasyon fonksiyonlarının frekans örneklerinin genlikleriyle çarpımlarının toplamı olarak ele alınabilir. Geçiş bölgesindeki değişken olan frekans örnekleri $T_k = |H_k|$ dikkate alınarak (10.80) yeniden yazılabilir.

$$H(e^{j\Omega}) = B(e^{j\Omega}) + \sum_{m=L_1}^{L_2} T_m S_m(e^{j\Omega}) \tag{10.81}$$

(10.81)'de görülen $B(e^{j\Omega})$, süzgecin frekansla değişmeyen frekans örneklerinin katkısını göstermektedir.

Ω geçirme ve durdurma bölgelerindeki frekanslar, $D(e^{j\Omega})$ arzulanan frekans cevabı ve $W(e^{j\Omega})$ herhangi bir ağırlaştırma fonksiyonu ise $\{T_m\}$ katsayılarına göre değişen hata fonksiyonu

$$|W(e^{j\Omega})[D(e^{j\Omega}) - H(e^{j\Omega})]| \tag{10.82}$$

olarak tanımlanır. $\{T_m\}$ katsayıları kullanılarak (10.82)'de tanımlanan hatanın en büyük değerini minimum yapacak şekilde koşullar oluşturulur.

Geçirme ve durdurma frekans bölgelerindeki en büyük hata δ ile gösterilsin. Frekans cevabını daha sık aralıklarla örnekleyerek aşağıdaki koşullar (10.82)'den elde edilebilir.

$$\begin{aligned} W(e^{j\Omega_k})[D(e^{j\Omega_k}) - H(e^{j\Omega_k})] &\leqslant \delta \\ -W(e^{j\Omega_k})[D(e^{j\Omega_k}) - H(e^{j\Omega_k})] &\leqslant \delta \\ k = 0, 1, 2, \ldots, N \text{ için} \end{aligned} \tag{10.83}$$

(10.82) ifadesi kullanılarak,

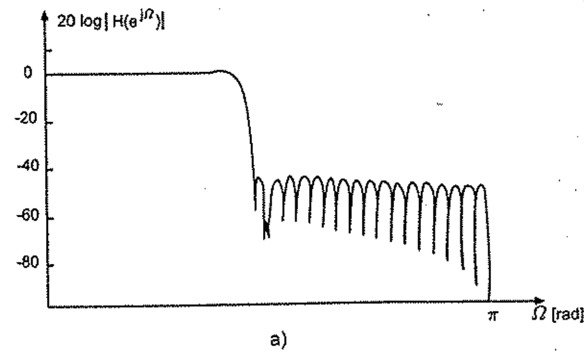
$$\begin{aligned} W(e^{j\Omega_k})D(e^{j\Omega_k}) - W(e^{j\Omega_k})B(e^{j\Omega_k}) - W(e^{j\Omega_k}) \sum_{m=L_1}^{L_2} T_m S_m(e^{j\Omega_k}) &\leqslant \delta \\ -W(e^{j\Omega_k})D(e^{j\Omega_k}) + W(e^{j\Omega_k})B(e^{j\Omega_k}) + W(e^{j\Omega_k}) \sum_{m=L_1}^{L_2} T_m S_m(e^{j\Omega_k}) &\leqslant \delta \end{aligned} \tag{10.84}$$

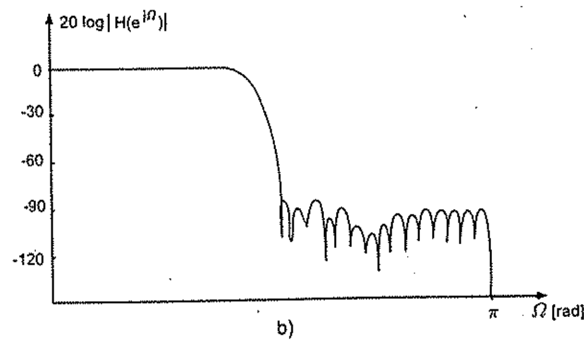
elde edilir. O halde, problem şu şekilde formüle edilebilir.

$-\delta$ yı maksimize edecek şekilde aşağıdaki koşullar altında $\{T_m\}$ katsayılarını bulunuz.

$$\begin{aligned} -W(e^{j\Omega_k}) \sum_{m=L_1}^{L_2} T_m S_m(e^{j\Omega_k}) - \delta &\leqslant -W(e^{j\Omega_k})D(e^{j\Omega_k}) + W(e^{j\Omega_k})B(e^{j\Omega_k}) \\ W(e^{j\Omega_k}) \sum_{m=L_1}^{L_2} T_m S_m(e^{j\Omega_k}) - \delta &\leqslant W(e^{j\Omega_k})D(e^{j\Omega_k}) - W(e^{j\Omega_k})B(e^{j\Omega_k}) \end{aligned} \tag{10.85}$$

Bu tasarım tekniğine örnek olarak, geçiş bandında sırasıyla bir ve üç katsayının optimizasyonunu ele alalım. Şekil 10.21(a) ve Şekil 10.21(b)'de tasarlanan alçak geçiren süzgeçlerin frekans cevapları görülmektedir. Bu şekillerin karşılaştırılmasından, geçiş bandındaki nokta sayısının artışının daha iyi sonuçlar vermekte olduğu görülmektedir. Gerçekten, geçiş bandında 3 nokta alınarak gerçekleştirilen tasarımda geçirme bandı daha az salınımlıdır ve durdurma bandında zayıflatma daha fazladır.





Şekil 10.21 Frekans örnekleme yöntemi ile tasarlanan alçak geçiren süzgeç örneklerinin frekans cevapları: (a) $N = 64$, 1 değişken katsayı için; (b) $N = 64$, 3 değişik katsayı için.

10.7 OPTİMUM SÜZGEÇ TASARIMI

Doğrusal programlama tekniği ile tasarlanan frekans örneklemeli süzgeçler optimum süzgeçlerdir. Bu yöntemde süzgecin optimum olması, maksimum hatanın minimize edilmesi anlamındadır. Yani, geçiş bandı içerisindeki frekans örnekleri değiştirilerek süzgecin geçirme ve/veya durdurma bandı içinde (10.82) ifadesi ile tanımlanan hatanın en büyük değeri minimum yapılmaya çalışılır.

Yukarıda açıklanan frekans örnekleme durumunda olduğu gibi, optimum süzgeçler matematiksel olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımlamada, önce değişken olan parametreler seçilmekte, sonra yaklaşıklığa konu olan optimalliğin kriteri belirlenmektedir. O halde, parametre seçimine ve optimalite kriterine bağlı olarak çeşitli optimum süzgeçler tasarlanabilir. Bu bölümde, tüm süzgeç katsayıları değişken parametreler olarak kabul edilecek ve optimizasyon sonucu belirlenecektir.

$D(e^{j\Omega})$ süzgecin arzu edilen frekans cevabı ve $H(e^{j\Omega})$ katsayıları değiştirilerek yaklaşık olarak elde edilen süzgecin transfer fonksiyonu ise, optimalite kriteri aşağıdaki $\|L_p\|$ normu ile tanımlanır.

$$\|L_p\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [D(e^{j\Omega}) - H(e^{j\Omega})]^p d\Omega \qquad (10.86)$$

Süzgecin katsayıları $\|L_p\|$ normunu minimum yapacak biçimde seçilmektedir.

$P = 2$ için problem oldukça basittir. Bu durumda norm, hataların karelerinin minimize edilmesine indirgenmiştir. (10.86) ifadesinin katsayılara göre türevinin sıfıra eşitlenmesiyle doğrusal denklem sistemi bulunur. Doğrusal denklemlerin çözümü ile süzgecin katsayıları belirlenir.

$\|L_p\|$ normunda p'nin 2'den farklı olması durumlarında problem doğrusal değildir. Katsayıların bulunabilmesi için doğrusal olmayan optimizasyon metodlarını kullanmak gereklidir. Ancak, doğrusal olmayan metodlar doğrusal olanlara göre daha karmaşık ve uzun zaman almaktadır.

10.7.1 Chebyshev Yaklaşıklık Problemi

Süzgeç tasarımında yaygın olarak kullanılan diğer bir kriter de Chebyshev yaklaşıklık kavramıdır. Eşit dalgalanma esasına dayanan bu yöntemde amaç, en büyük hatayı kontrol etmektedir. Yani, en büyük hatayı minimum yapacak biçimde süzgeç katsayıları belirlenmektedir.

Chebyshev yaklaşıklığı (10.86) ifadesindeki, $\|L_p\|$ normunda $p = \infty$ için bulunur. Ancak problemi basitleştirmek için (10.86) denklemini yeniden tanımlamak daha yararlıdır. $(0 - \pi)$ frekans aralığında birbiri ile kesişmeyen frekans aralıklarından oluşan Ω noktalarının oluşturduğu bir kapalı F kümesini ele alalım. Yaklaşık olarak bulunmaya çalışılan süzgeç fonksiyonu $H(e^{j\Omega})$ ve arzulanan frekans cevabı $D(e^{j\Omega})$ ile gösterilsin. Bu durumda, F kümesinde $D(e^{j\Omega})$ nın $H(e^{j\Omega})$ için yaklaşıklık ifadelerinde ağırlaştırılmış hata fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$E(e^{j\Omega}) = |W(e^{j\Omega})[D(e^{j\Omega}) - H(e^{j\Omega})]| \qquad (10.87)$$

$W(e^{j\Omega})$ pozitif ağırlaştırma fonksiyonudur. $W(e^{j\Omega})$'nın seçimi geçirme ve durdurma bantları arasındaki ilişkinin bağıl ölçüsünü belirlemektedir. Yani, farklı frekans aralıkları için hatayı tanımlamayı sağlamaktadır. Chebyshev optimizasyon kriteri F kümesinde (10.87)'deki en büyük hatanın minimizasyonudur.

Doğrusal fazlı FIR süzgeç tasarımında, frekans örnek seçimindeki farklı iki durum ve süzgeç uzunluğu N'nin tek veya çift olmasına göre dört tip süzgeç

fonksiyonu vardır. Ancak, yaklaşık süzgeç transfer fonksiyonu $H(e^{j\Omega})$, birleşik bir formda,

$$H(e^{j\Omega}) = P(e^{j\Omega})Q(e^{j\Omega}) \qquad (10.88)$$

olarak gösterilebilir. $P(e^{j\Omega})$ uygun ağırlaştırma fonksiyonu ve $Q(e^{j\Omega})$ ise kosinüs fonksiyonlarının doğrusal kombinasyonudur. Yani,

$$Q(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(n\Omega) \qquad (10.89)$$

yazılabilir. Doğrusal faz terimini ihmal ederek $P(e^{j\Omega})$ yazılabilir. Şimdi, $P(e^{j\Omega})$'yı değişik süzgeç tipleri için bulalım.

Tip 1

N tek ve çift simetri için,

$$P(e^{j\Omega}) = 1 \qquad (10.90)$$

Tip 2

N tek ve tek simetri için,

$$H(e^{j\Omega}) = -j\sum_{n=1}^{(N-1)/2} b(n)\sin(n\Omega) \qquad (10.91)$$

yazılır. Buradan,

$$\sum_{n=1}^{(N-1)/2} b(n)\sin(n\Omega) = \sin\Omega \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \tilde{b}(n)\cos(n\Omega) \qquad (10.92)$$

$$P(e^{j\Omega}) = \sin\Omega \qquad (10.93)$$

Tip 3

N çift ve çift simetri için,

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=1}^{N/2} c(n)\cos[(n-(1/2))\Omega] \qquad (10.94)$$

yazılır. Buradan,

$$\sum_{n=1}^{N/2} c(n)\cos[\Omega(n-(1/2))] = \cos\frac{\Omega}{2}\sum_{n=0}^{N/2} \tilde{c}(n)\cos(n\Omega) \qquad (10.95)$$

$$P(e^{j\Omega}) = \cos(\Omega/2) \qquad (10.96)$$

bulunur.

Tip 4

N çift ve tek simetri için

$$\sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin[\Omega(n-(1/2))] = \sin\frac{\Omega}{2}\sum_{n=0}^{N/2}\tilde{d}(n)\cos(n\Omega) \tag{10.97}$$

yazılır. Buradan,

$$P(e^{j\Omega}) = \sin(\Omega/2) \tag{10.98}$$

bulunur.

Yaklaşıklıkta ortaya çıkan hata ifadesi (10.87) ve (10.88) denklemlerinden

$$\begin{aligned} E(e^{j\Omega}) &= |W(e^{j\Omega})[D(e^{j\Omega}) - P(e^{j\Omega})Q(e^{j\Omega})]| \\ &= \left|W'(e^{j\Omega})\left[\frac{D(e^{j\Omega})}{P(e^{j\Omega})} - Q(e^{j\Omega})\right]\right| \end{aligned} \tag{10.99}$$

yazılabilir. Bu gösterilimde,

$$W'(e^{j\Omega}) = W(e^{j\Omega})P(e^{j\Omega}) \tag{10.100}$$

ve

$$D'(e^{j\Omega}) = \frac{D(e^{j\Omega})}{P(e^{j\Omega})} \tag{10.101}$$

olarak tanımlanırsa, hata ifadesi

$$E(e^{j\Omega}) = |W'(e^{j\Omega})[D'(e^{j\Omega}) - Q(e^{j\Omega})]| \tag{10.102}$$

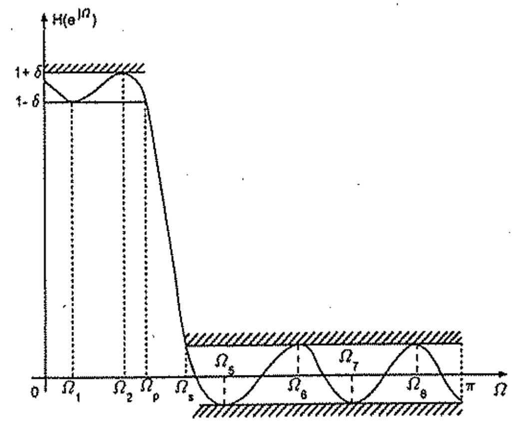
formunda bulunur. Bu son elde edilen hata denklemi herhangi bir süzgeç tipi için kullanılabilen hata tanımıdır.

Minimizasyon probleminin çözümünü araştırırken, Chebyshev yaklaşıklığının bir özelliği çok faydalıdır. Parks ve McClellan [7] tarafından yeniden formüle edilen bu özellik alternasyon teoremi olarak adlandırılır.

Teorem 10.1 (Alternasyon Teoremi). Eğer $Q(e^{j\Omega})$ (10.89)'daki gibi $M+1$ ($M=(N-1)/2$) kosinüs fonksiyonun doğrusal kombinasyonu ise, F kümesinde $Q(e^{j\Omega})$ nin tek (unique) ve $D'(e^{j\Omega})$ nın en iyi Chebyshev yaklaşıklığı olabilmesi için gerek ve yeter koşul: Hata fonksiyonu $|E(e^{j\Omega})|$, F üzerinde en az $M+2$ alternasyon göstermelidir.

Başka bir anlatımla,

$$E(e^{j\Omega_i}) = -E(e^{j\Omega_{i+1}}), \quad i = 0,1,2,\ldots,M \tag{10.103}$$



Şekil 10.22 $M=7$ için alternasyon teoremini sağlayan alçak geçiren süzgeç yaklaşıklığının tipik bir örneği.

ve

$$E(e^{j\Omega_i}) = \max_{\Omega\in F}|E(e^{j\Omega})| \tag{10.104}$$

olacak şekilde F kümesinde, $\Omega_0 < \Omega_1 < \ldots < \Omega_{M+1}$ gibi $M+2$ frekans noktası olmalıdır.

Bu teoremi açıklamak için alçak geçiren süzgeç tasarımını ele alalım. Bu durumda, F kümesi geçirme bandı $0 \leqslant \Omega \leqslant \Omega_p$ ve durdurma bandı $\Omega_s \leqslant \Omega \leqslant \pi$ aralıklarından oluşmaktadır. Ω_i frekansları hata fonksiyonu $E(e^{j\Omega})$'nın tepelerine karşı düşmektedir. Bu frekanslarda $H(e^{j\Omega})$ hata toleransı içinde kalarak alternasyon teoremini sağlar. Şekil 10.22, $M=7$ için tipik bir alçak geçiren süzgeç yaklaşıklığını göstermektedir. Alternasyon teoreminde belirtilen eşit dalgalı hata davranışı gösteren süzgeç tasarımında çeşitli yöntemler literatürde bulunmaktadır [8-10]. Bunlar içerisinde en başarılısı etkili bir bilgisayar yazılımı olan Remez değişim algoritmasıdır [11,12]. Bu kitapta, Remez algoritmasının detaylarına girilmeyecektir. Ancak, kısaca şöyle özetleyebiliriz:

Alternasyon teoremi, optimum çözümde hatanın en az $M+2$ tepe noktası olması gerektiğini belirtmektedir. Yaklaşıklık bölgesi içinde, $\{\Omega_k\}_{k=0}^{M+1}$ tepe noktalarına karşı düşen frekans kümesini göstersin. Böylece aşağıdaki $M+2$ ilişki yazılabilir.

$$W'(e^{j\Omega})[D'(e^{j\Omega}) - Q(e^{j\Omega})] = (-1)^k\delta \tag{10.105}$$

Yukarıdaki ilişki $M+2$ değişkenli $M+2$ denklemden oluşan doğrusal denklem sistemini göstermektedir. Bulunmaya çalışılan değişkenler, yaklaşıklık fonksiyonunun $M+1$ katsayısı $\{a(n)\}_{n=0}^{M}$ ve bilinmeyen hata terimi (δ) dır. (10.105)'de, ifade edilen doğrusal denklem sisteminin çözümü vardır. Yani, katsayılar matrisinin tersi alınabilir. Bu durumda, Remez algoritması aşağıdaki formu alır.

1. $M+2$ frekans noktası $\{\Omega_k\}_{k=0}^{M+1}$ seçilir ve $\{a(n)\}_{n=0}^{M}$ katsayılarını ve δ'yı elde etmek için (10.105)'deki denklem sistemi çözülür. Bu yolla bulunan yaklaşıklık fonksiyonunun Ω_k noktalarında arzu edilen fonksiyondan uzaklığı δ'ya eşittir.

2. Hata fonksiyonu $E(e^{j\Omega})$ ayrık Ω_k frekanslarının arasındaki frekanslarda δ ile karşılaştırılır. Tüm yaklaşıklık aralığında $|E(e^{j\Omega})| \leqslant \delta$ ise yukarıdaki çözüm optimumdur. Eğer bazı noktalarda $|E(e^{j\Omega})| > \delta$ ise, yeni bir küme $\{Q_k\}_{k=0}^{M+1}$ frekans noktaları seçilir. Bu noktalarda hata maksimum olup alternatif işarettedir.

O halde, gerçek problem geçirme ve durdurma bandındaki bu özel frekans noktalarının $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{M+1}$ nasıl bulunacağıdır. Bu noktalarda süzgecin frekans cevabındaki hata en büyük olacaktır. Remez değişim algoritmasında bu noktaların bulunması işlemini şöyle açıklayabiliriz.

Arzu edilen frekans cevabı karakteristiği

$$D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant \Omega \leqslant \Omega_p \\ 0 & \Omega_s \leqslant \Omega \leqslant \pi \end{cases} \tag{10.106}$$

olarak verilsin. Ağırlaştırma fonksiyonu $W(e^{j\Omega})$ ise,

$$D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{1}{k} & 0 \leqslant \Omega \leqslant \Omega_p \\ 1 & \Omega_s \leqslant \Omega \leqslant \pi \end{cases} \tag{10.107}$$

olarak tanımlansın. Tasarım problemi $\{a(n)\}_{k=0}^{M}$ süzgeç katsayılarının, (10.102) ifadesinde verilen hatanın geçirme ve durdurma bandındaki en büyük değerini minimum yapacak biçimde bulunmasıdır. Yani,

$$Q(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M} a(n)\cos(n\Omega) \tag{10.108}$$

fonksiyonu $[0, \Omega_p]$ ve $[\Omega_s, \pi]$ aralığındaki en büyük hatayı minimize etmektedir. $P(e^{j\Omega}) = 1$ için hata ifadesi

$$E(e^{j\Omega}) = W(e^{j\Omega})[D(e^{j\Omega}) - Q(e^{j\Omega})] \tag{10.109}$$

olarak yazılabilir. $M = 7$ için böyle bir süzgecin beklenen frekans cevabı Şekil 10.22'de gösterildiği gibi olacaktır.

Açıklama 10.7 (10.109)'daki hata fonksiyonunun sadece geçirme ve durdurma bandında tanımlandığına dikkat edilmelidir. Yani, geçiş bandı için hata tanımlanmaz. $W(e^{j\Omega})$ fonksiyonu geçirme ve durdurma bandına ilişkin en büyük hataların (δ_1 ve δ_2) bağıl ilişkisini göstermektedir. $W(e^{j\Omega})$'dan dolayı geçirme ve durdurma bandındaki en büyük hatalar sırasıyla δ_1/K ve δ_2 olur. O halde $k = (\delta_1/\delta_2)$ olup $K = 1$ için $\delta_1 = \delta_2$ olacaktır. Eğer δ_1'i daha küçük yapmak istiyorsak $K < 1$ seçilir. Süzgeç uzunluğu sabit tutulursa, geçiş bandı artırıldıkça δ_1 daha küçülmektedir.

Remez algoritmasına göre, öncelikle $[0, \Omega_p]$ ve $[\Omega_s, \pi]$ içinde kalmak koşulu ile rastgele $M+2$ frekans noktası seçilir. Bant kenar frekansları Ω_p ve Ω_s bu seçilen noktalar içinde olmalıdır. Bu noktalar, $[0, \Omega_p]$ ve $[\Omega_s, \pi]$ bantlarında eşit frekans aralığında seçilebilir. Daha sonra, (10.105)'den $a(k)$ katsayıları ve maksimum hata δ hesaplanır. Bulunan süzgeç katsayıları $a(k)$ (10.109)'da yerine konularak frekansa göre hatanın değişimini gösteren $E(e^{j\Omega})$ hesaplanır. Bundan sonraki adımda, $[0, \Omega_p]$ ve $[\Omega_s, \pi]$ aralığındaki tüm Ω frekansları için $|E(e^{j\Omega})| \leqslant \delta$ olduğunu kontrol etmek gerekmektedir. Eğer sonuç olumlu ise, bulunan süzgeç optimumdur. Ancak, Şekil 10.22'de görüldüğü gibi, seçilen frekans noktalarının arasında kalan frekanslarda $|E(e^{j\Omega})| > \delta$ olması durumunda, yeni bir $\{\Omega_k\}$ kümesi seçilir. Hatanın en büyük yada minimum olduğu noktalar yeni frekans noktaları olarak belirlenir. Bu yeni noktalar kullanılarak tasarım işlemi tekrarlanır.

Açıklama 10.8 $|E(e^{j\Omega})| \leqslant \delta$ olduğunun geçirme ve durdurma bandındaki tüm frekanslar için gösterilmesi gerekmektedir. Bu işlemin yapılması için bir yol hatanın frekansa göre türevinin sıfır olduğu Ω'_k noktalarında $|E(e^{j\Omega'_k})| \leqslant \delta$ kontrolünü yapmaktır. Ancak, bu yöntem türev alınması ve kök bulunması gibi hesaplamalar gerektirdiğinden karmaşık ve zordur. Daha kolay bir metod $|E(e^{j\Omega})| \leqslant \delta$ karşılaştırmasını doğrudan yapmaktadır. Örneğin ilgilenilen frekans aralığında eşit aralıklı $20M$ nokta için $E(e^{j\Omega})$ hesaplanabilir. Eğer bu $20M$ noktada $|E(e^{j\Omega})| \leqslant \delta$ ise, geçirme ve durdurma bandındaki tüm frekanslar için $|E(e^{j\Omega})| \leqslant \delta$ olduğu sonucuna varılır.

REFERANSLAR

1. C. T. Chen *One-Dimensional Digital Signal Processing*, Marcel Dekker, New York, 1979.

2. V. Cappellini, A. G. Constantinides, and P. Emiliani *Digital Filters and their Applications*, Academic Press, New York, 1978.

3. A. V. Oppenheim and R. W. Schafer *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

4. A. Peled and B. Liu *Digital Signal Processing: Theory, Design and Implementation*, John Wiley, New York, 1976 .

5. A. Antoniou *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1979.

6. B. Gold and K. L. Jordan, Jr., "A Direct Search Proeedure For Designing Finite Duration Impulse Response Filters", *IEEE Trans. Audio Electro-Electroacoust.*, vol.AU-17, pp. 33-36, March 1969.

7. T. W Parks and J. H. McClellan, "Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters With Linear Phase", *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol.CT-19, pp. 89-194, March 1972.

8. O. Herrman and H. W. Schüssler, "Design of Nonrecursive Digital Filters With Minimum Phase", *Electronics Letters*, vol.6, pp. 329-330, 1970.

9. H. D. Helms, Digital Filters With Equiripple or Minimax Response, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol.AU-19, pp. 87-94, January 1971.

PROBLEMLER

10.1 FIR süzgeç tasarımında nedensellik niçin bir problem değildir? Açıklayınız.

10.2 $H(z)$ aşağıda verilen noktalarda sıfırlara sahip bir FIR süzgeç ise doğrusal fazlı olduğunu gösteriniz.

$$z_1 = re^{j\theta},\ z_2 = \frac{1}{r}e^{j\theta},\ z_3 = re^{-j\theta},\ z_4 = \frac{1}{r}e^{-j\theta}$$

10.3 a) 5-uzunluğunda ters-simetrik impuls cevaplı (yani $h(n) = -h(4-n)$, $0 \leqslant n \leqslant 4$) alçak geçiren bir FIR süzgecin frekans cevabı şu koşulları sağlıyor:
$|H(e^{j0})| = 1$ ve $|H(e^{j\pi/4})| = 0.5$.
Süzgecin impuls cevabını bulunuz.

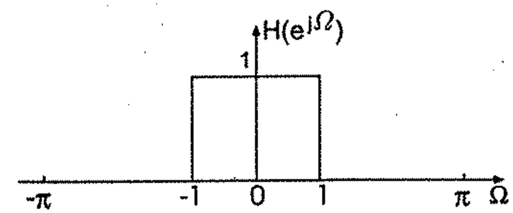
b) Süzgecin frekans cevabı ifadesini yazınız ve genlik ve faz cevabını çizdiriniz.

10.4 $H(e^{j\Omega})$ istenilen frekans cevabı ve $H_w(e^{j\Omega})$ ise pencereleme yöntemi kullanarak tasarlanan FIR süzgecin frekans cevabı olsun. Sabit bir pencere uzunluğu için tüm pencere fonksiyonları arasında aşağıda tanımlanan karesel hatayı minimize eden pencerenin dikdörtgen pencere olduğunu gösteriniz (Parseval teoremini kullanabilirsiniz).

$$\|L_2\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\Omega}) - H_w(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

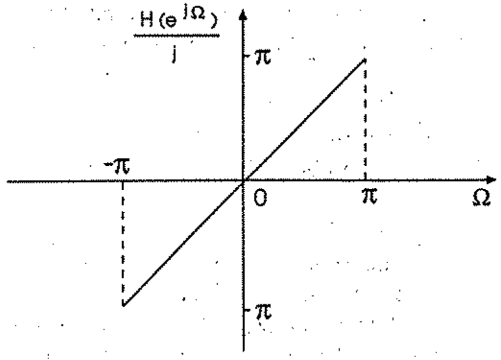
Burada tanımlanan hata kriteri, (10.86)'da tanımlanan $\|L_p\|$ normuna $p = 2$ için eşit olmaktadır. Bu çeşit bir hata kriterini en küçük yapmasına rağmen dikdörtgen pencerenin niçin tercih edilmediğini ilgili bölümde yapılan tartışmayı hatırlayarak belirtiniz.

10.5 Şekil 10.23'teki ideal alçak geçiren süzgeci yaklaşıklıkla sağlayan doğrusal fazlı FIR süzgeci $N = 5$ için tasarlayınız. Genlik cevabındakı dalgalanmaları azaltmak için Hamming penceresi kullanınız. Bulunan FIR süzgecin genlik cevabını çiziniz.



Şekil 10.23

10.6 Şekil 10.24'teki ideal diferansiyel alıcı süzgeci yaklaşıklıkla sağlayan doğrusal fazlı FIR süzgeci $N = 5$ için tasarlayınız. Hamming penceresi kullanınız. Bulunan FIR süzgecin genlik karakteristiğini çiziniz.



Şekil 10.24

10.7 Spesifikasyonları aşağıda verilen doğrusal fazlı FIR alçak geçiren süzgeci pencereleme yöntemiyle tasarlayınız. Durdurma bandında istenen minimum zayıflamayı dB cinsinden bularak Tablo 10.3'ten uygun pencereyi ve pencere uzunluğunu seçiniz.

$$0.995 \leqslant |H(e^{j\Omega})| \leqslant 1.005 \quad 0 \leqslant |\Omega| \leqslant 0.29\pi$$
$$|H(e^{j\Omega})| \leqslant 0.005 \quad 0.31\pi \leqslant |\Omega| \leqslant \pi$$

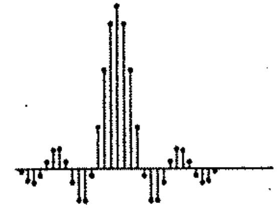
10.8 $\Omega_p = 2.5$ rad ve $\Omega_q = 1.5$ rad olacak şekilde ideal yüksek geçiren süzgeci minimax anlamında yaklaşıklıkla sağlayan $N = 3$ uzunluğunda ($N' = 1$) optimal FIR süzgeci tasarlayınız. Ağırlaştırma fonksiyonundaki K parametresi 1 alınacaktır (minimax terimi en büyük hatanın minimize edilmesi anlamında kullanılmıştır).

MATLAB UYGULAMALARI

M10.1 Gibbs olayı: Fourier serisi metodu ve MATLAB `sinc` fonksiyonunu kullanarak özellikleri aşağıda verilen süzgeçlerin impuls cevabı katsayılarını bulan bir MATLAB programı yazın.
Özellikler: Sıfır fazlı, (81, 61, 41 ve 21) uzunluklarında, $\Omega_c = 0.4\pi$ kesim frekanslı, alçak geçiren süzgeçler. Bu süzgeçlerin genlik cevaplarını bulun ve çizin. Bütün süzgeçler için: Kesim frekansının her iki tarafında frekans cevabının salınımlarını inceleyiniz. Kıpırtıların (ripple) sayısı ve süzgeç uzunluğu arasında; en büyük kıpırtının yüksekliği ve süzgeç uzunluğu arasında nasıl bir ilişki var?

M10.2 MATLAB kullanarak pencereleme yöntemiyle FIR süzgeç tasarımında MATLAB'in içerdiği `fir1` ve `fir2` tasarım komutları kullanılabilir. Yada Örnek 10.3'te izlediğimiz yöntemde olduğu gibi kendi süzgeç tasarım programımızı yazabiliriz.
23 uzunluğunda, doğrusal fazlı, $\Omega_c = 0.3\pi$ alçak geçiren FIR süzgeci dikdörtgen, Hanning, Hamming ve Blackman pencerelerini kullanarak tasarlayın. Süzgeçlerin impuls cevaplarını, genlik cevaplarını ve sıfırlarının yerlerini çizdiriniz. Süzgeçlerin genlik cevaplarını karesel hata açısından karşılaştırınız.
Bazı faydalı MATLAB Signal Processing Toolbox komutları:

```
fir1 fir2 freqz hanning hamming blackman boxcar
```



Bölüm 11

IIR SÜZGEÇ TASARIM METODLARI

11.1 GİRİŞ

Bu bölümde impuls cevabı sonsuz uzunlukta olan sayısal süzgeçlerin tasarımı tartışılacaktır. Bu tür süzgeçler IIR (Infinite Impulse Response) süzgeçler olarak adlandırılır. Bir IIR süzgeç, impuls cevabı $\{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$, fark denklemi veya transfer fonksiyonu yardımı ile belirlenebilir. Bu gösterilimler arasında, süzgeç tasarımı için kullanımı en basit olan transfer fonksiyonudur. IIR süzgecin transfer fonksiyonu en genel biçimde,

$$H(z) = \frac{a(0) + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2} + \ldots + a(M)z^{-M}}{1 + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + \ldots + b(N)z^{-N}} \tag{11.1}$$

olarak yazılabilir. Burada $M \leqslant N$ olup $b(i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ katsayılarının tümü birden sıfır değildir. Tasarım probleminde amaç, $a(i)$ ve $b(i)$ katsayılarının bulunmasıdır. Bu katsayılar hesaplanırken, $H(z)$'nin tasarımda istenilen özellikleri sağlaması gerekmektedir. Bölüm 9'da tartışıldığı gibi, sayısal süzgecin özellikleri genlik karakteristiği, faz karakteristiği ve geçici performanstan oluşmaktadır. Ancak, gerçek bir tasarımda, kararlılık, nedensellik ve basitlik gibi koşullardan dolayı sadece genlik karakteristiği ele alınır. O halde tasarım problemi, istenilen genlik karakteristiği $|H(e^{j\Omega})|$'yi sağlayacak biçimde $a(i)$ ve $b(i)$ katsayılarının bulunmasına indirgenebilir. Bu bölümde, çeşitli dönüşümler kullanılarak analog süzgeçlerden IIR süzgeçler tasarlanacaktır. Analog süzgeç tasarımının detaylı olarak incelenmiş olması ve kolaylıkla gerçekleştirilebilmesi nedeni ile bu yöntem kullanılmaktadır. IIR süzgeçlerin bilgisayar destekli olarak yaklaşıklık metodları ile tasarlanması konuları incelenmeyecektir. Oldukça karmaşık olan IIR süzgeç doğrudan tasarım teknikleri için literatürde referanslar bulunabilir [1-3]. IIR sayısal süzgeçler, analog süzgeç yaklaşıklarından aşağıdaki metodlar kullanılarak elde edilebilir [4-6].

1. Değişmez-impuls-cevabı metodu
2. Metod 1'in değiştirilmiş versiyonu
3. Uygunlaştırılmış-z-dönüşümü
4. Bilineer dönüşüm

11.2 DEĞİŞMEZ-İMPULS-CEVABI METODU

Bu bölümde, alçak geçiren bir analog süzgeci sayısal süzgece dönüştüren bir yöntem tartışılacaktır. Herhangi bir karıştırmayı önlemek için analog ve sayısal frekans için omega frekanslarını tekrar hatırlayalım. ω analog frekansı, Ω ise sayısal frekansı göstermektedir. T örnekleme aralığı olduğuna göre $\Omega = \omega T$ ilişkisi bilinmektedir. Analog alçak geçiren süzgecin transfer fonksiyonu $H_a(s)$ ile gösterilirse, impuls cevabı ilk koşullar sıfır alınarak ters Laplace dönüşümü ile bulunur.

$$h_a(t) = \mathscr{L}^{-1}[H_a(s)] \qquad (11.2)$$

Sürekli-zamanlı impuls cevabı $h_a(t)$'nin $t = nT$ anlarında örneklenmesi ile elde edilen $h_a(nT)$ tasarlanmak istenen sayısal süzgecin impuls cevabı olacaktır. O halde, sayısal süzgecin transfer fonksiyonu

$$H_D(z) = Z[h_a(nT)] \qquad (11.3)$$

olarak bulunur. (11.2) ve (11.3) den analog ve sayısal süzgecin impuls cevaplarının değişmediği görülmektedir. Eğer $H_a(\omega)$ sınırlı bantlı ise, elde edilen sayısal süzgecin temel-bant frekans spektrumu yaklaşık olarak analog süzgecin frekans cevabının $(1/T)$ sabit katsayısıyla çarpımı kadar olacaktır. (6.21)'den

$$H_D(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(\omega - k\omega_s) \qquad (11.4)$$

Burada $w_s = 2\pi/T$ örnekleme frekansıdır. Ayrıca, $h(nT)$'nin z-dönüşümü ile $h(t)$'nin Laplace dönüşümü arasında da benzer bir ilişki vardır.

$$H_D(z)\Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(s + j(2\pi/T)k) \qquad (11.5)$$

Şekil 11.1'de gösterildiği üzere, $z = e^{sT}$ ilişkisinden s-düzlemindeki $(2\pi/T)$ genişliğindeki taralı bölge, z-düzleminde birim daire içine karşı düşmektedir.

$$H_a(\omega) \approx 0, \quad |\omega| \geqslant \omega_s/2 \qquad (11.6)$$

Sınırlı bant koşulu sağlanırsa,

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} H_a(\omega - k\omega_s) \approx 0, \quad |\omega| \leqslant \omega_s/2 \qquad (11.7)$$

yazılabilir. Yani, (11.4)'de gösterilen sayısal süzgecin temel-bant frekans spektrumuna $(-\omega_s/2, \omega_s/2)$ yan bantlarının toplam etkisi ihmal edilecek kadar azdır. O halde,

$$H_D(e^{j\omega t}) \cong (1/T)H_a(\omega) \quad |\omega| \leqslant \omega_s/2 \qquad (11.8)$$

olur. (11.6) koşulunun sağlanması durumunda, analog impuls cevabının örnekleri ile elde edilen sayısal süzgecin frekans cevabı yaklaşık olarak analog spektrumun aynı olmaktadır. Analog süzgecin transfer fonksiyonu $H_a(s)$ sadece basit tek katlı köklere sahipse,

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \qquad (11.9)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, metodun gerektirdiği impuls cevabının bulunması ve örnekleme işlemleri kolaylıkla gerçekleştirilebilir. (11.2) denkleminden

$$h_a(t) = \mathscr{L}^{-1}[H_a(s)] = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} \qquad (11.10)$$

$$h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT} \qquad (11.11)$$

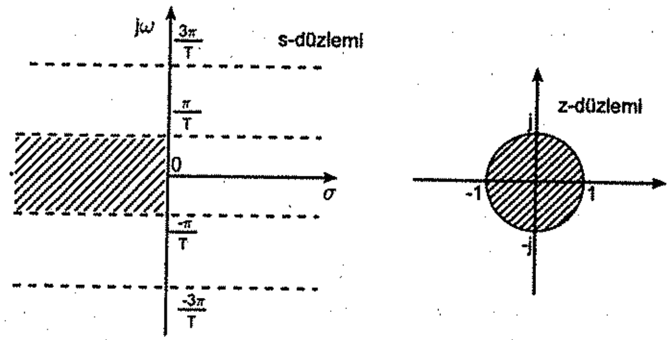
yazılabilir. Sonuç olarak, tasarlanan süzgecin transfer fonksiyonu,

$$H_D(z) = Z[h_a(nT)] = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k z}{z - e^{s_k T}} \qquad (11.12)$$

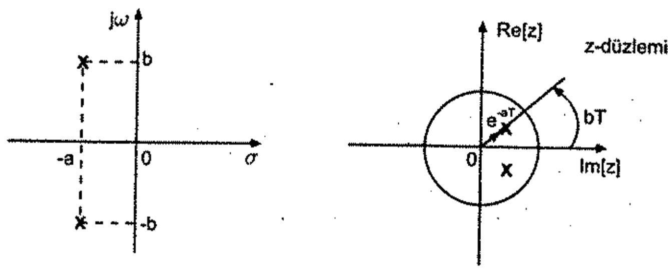
olarak bulunur. $H_a(s)$'nin karmaşık eşlenik kutupları nedeni ile, A_k ve $e^{s_k T}$'nin karmaşık eşlenikleri olacaktır. Sonuç olarak, (11.12)'deki $H_D(z)$'nin katsayıları gerçeldir. Kararlı analog süzgecin $s_k = \sigma_k + j\omega_k$ kutbu $H_D(z)$'nin

$$z_k = e^{s_k T} = e^{(\sigma_k + j\omega_k)T} \qquad (11.13)$$

kutbuna dönüşmektedir. Buradan, $\sigma_k < 0$ için, $|z_k| < 1$ olmaktadır. Yani, sol yarı düzlemdeki analog kutuplar z-düzleminde birim daire içine düşmektedir. O halde, kararlı analog süzgeç, bu anlatılan yöntemle kararlı sayısal süzgece dönüşmektedir. Kararlılık korunmaktadır.



Şekil 11.1 Periyodik örneklemenin gösterilimi.



Şekil 11.2 Kutupların s-düzleminden z-düzlemine dönüşümü.

Örnek 11.1 Aşağıdaki ikinci dereceden analog süzgeç transfer fonksiyonuna karşı düşen sayısal süzgeci değişmez-impuls-cevabı metodu ile bulalım. Verilen

$$H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \tag{11.14}$$

transfer fonksiyonu öncelikle (11.9)'daki gibi kısmi kesirlere açılmış olarak

$$H_a(s) = \frac{0.5}{s+a+jb} + \frac{0.5}{s+a-jb} \tag{11.15}$$

biçiminde yazılır. Buradan, $A_1 = A_2 = 0.5$, $s_1 = -a - jb$ ve $s_2 = -a + jb$ olarak bulunur. $H_a(s)$ ve $H_D(z)$'nin kutuplarının yerleri Şekil 11.2'de görülmektedir. (11.12)'den sayısal süzgecin transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} H_D(z) &= \frac{0.5z}{z - e^{-(a+jb)T}} + \frac{0.5z}{z - e^{-(a-jb)T}} \\ &= \frac{0.5z[2z - e^{-aT}(e^{-jbT} + e^{jbT})]}{z^2 - ze^{-aT}(e^{-jbT} + e^{jbT}) + e^{-2aT}} \\ &= \frac{z(z - e^{-aT}\cos bT)}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos bT + e^{-2aT}} \end{aligned} \tag{11.16}$$

olarak elde edilir. Elde edilen sayısal süzgeç transfer fonksiyonu $H_D(z)$'nin frekans spektrumu $H_D(e^{j\Omega T})$ ve analog süzgecin frekans cevabı $H_a(\omega)$ Şekil 11.3'te görülmektedir.

Örnek 11.2 Örnek 11.1'i MATLAB kullanarak tekrarlayınız.

$$H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} = \frac{s+a}{s^2+2as+a^2+b^2}$$

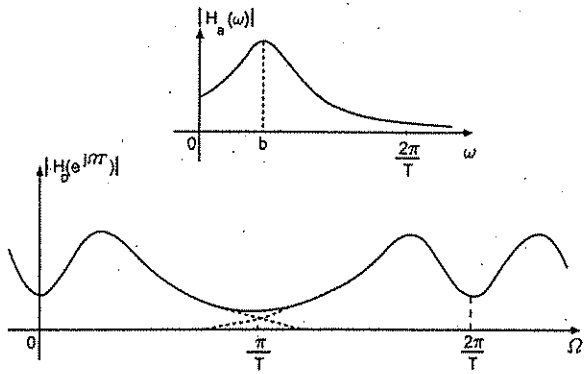
Çözüm. Değişmez impuls cevabı yöntemini MATLAB kullanarak gerçeklemek oldukça kolaydır. `residue` komutuyla, verilen bir analog transfer fonksiyonu için sıfır-kutup gösterilimi bulunabilir. Daha sonra (11.12) ile belirtilen şekilde analog kutuplar sayısal kutuplara dönüştürülür. `residuez` komutuyla ise sayısal süzgeç, sıfır-kutup gösteriliminden rasyonel transfer fonksiyonuna çevrilir. Aşağıda verilen program bu adımları göstermektedir.

```
B_analog=[1 a]; A_analog=[a^2+b^2 2a 1];
[R,p_analog,k] = residue(B_analog,A_analog);
p_sayisal = exp(p*T);
[B_sayisal,A_Sayisal] = residuez(R,p_sayisal,k);
```

□

Analog transfer fonksiyonu $H_a(\omega)$, ω'nin rasyonel bir fonksiyonu olduğu için (11.6)'daki koşulu sağlamamaktadır. Bunun sonucu olarak, impuls cevabı değişmemesine karşın elde edilen sayısal-süzgecin frekans karakteristiği $H_a(\omega)$'dan farklı olmaktadır. Örnekleme frekansının artırılması, örtüşme etkisini azaltacağından daha iyi sonuç verir.

Açıklama 11.1 Bu dönüşüm metodunda; s-düzlemi s_k kutupları z-düzlemi içindeki $z_k = e^{s_k T}$ kutuplarına karşı düşmektedir. Eğer s_k sol-yarı düzlemde ise, $z_k = e^{s_k T}$ birim dairenin içindedir. Bununla beraber, bu dönüşüm birebir değildir. Yani, s-domeninde birçok nokta z-düzleminde aynı noktaya karşı düşmektedir.



Şekil 11.3 $H_a(\omega)$ ve $H_D(e^{j\omega T})$ frekans spektrumu.

Açıklama 11.2 (11.6)'daki koşulun, Örnek 11.1'de gösterildiği gibi pratikte sağlanamamasından dolayı örtüşme oluşmaktadır. Alçak geçiren süzgeç için yaklaşık olarak doğru olan bu yöntem bazı ilginç durumlar için tamamen başarısızdır. Örneğin, yüksek geçiren ve bant söndüren durumlar için kullanılamaz.

11.3 DEĞİŞTİRİLMİŞ DEĞİŞMEZ-İMPULS-CEVABI METODU

Örtüşme hataları nedeni ile değişmez-impuls-cevabı metodu sadece kutupları olan (all-pole) süzgeçlere uygulanabilmektedir. Ancak, bu metodun değiştirilmiş bir versiyonu sınırlı sayıda iletim sıfırları olan süzgeçlere de uygulanabilir.

Aşağıdaki transfer fonksiyonunu ele alalım.

$$H_a(s) = H\frac{N(s)}{D(s)} = H\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-n_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \tag{11.17}$$

Burada H sabit bir katsayı ve $M \leqslant N$ olabilir. Analog transfer fonksiyonu $H_a(s)$ kutupları olan iki süzgeç transfer fonksiyonunun oranı biçiminde yazılabilir. Bu amaçla,

$$H_{a_1}(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \tag{11.18}$$

$$H_{a_2}(s) = \frac{1}{N(s)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{M}(s-n_i)} \tag{11.19}$$

tanımlanarak analog transfer fonksiyonu $H_a(s)$

$$H_a(s) = H\frac{H_{a_1}(s)}{H_{a_2}(s)} \tag{11.20}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer $H_a(s)$'nin sıfır ve kutupları basit tek katlı ise, (11.12) den $H_{a_1}(s)$ ve $H_{a_2}(s)$ analog fonksiyonlarına karşı düşen z-domeni transfer fonksiyonları

$$H_{D_1}(z) = \sum_{k=1}^{N}\frac{A_i z}{z-e^{d_k T}} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \tag{11.21}$$

$$H_{D_2}(z) = \sum_{i=1}^{M}\frac{A_k z}{z-e^{n_i T}} = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \tag{11.22}$$

olur. O halde, (11.20) ve (11.21) denklemlerinden,

$$H_D(z) = H\frac{H_{D_1}(z)}{H_{D_2}(z)} = H\frac{N_1(z)D_2(z)}{N_2(z)D_1(z)} \tag{11.23}$$

olarak yazılabilir. Elde edilen sayısal süzgecin transfer fonksiyonu $H_D(z)$ kararsız olabilir. (11.23) denkleminin paydasında görülen $N_2(z)$'nin bazı sıfırları z-düzleminde birim dairenin dışında kalabilir. Ancak, kararsız kutuplar resiprokları ile değiştirilerek kararlı duruma getirilebilir. Bölüm 4.4.1'de resiprok kutuplar yöntemi ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Bu yöntem, alçak geçiren ve bant geçiren eliptik süzgeçler için iyi sonuçlar vermektedir. $H_D(z)$'nin derecesinin yükselmesi yöntemin olumsuz yanıdır.

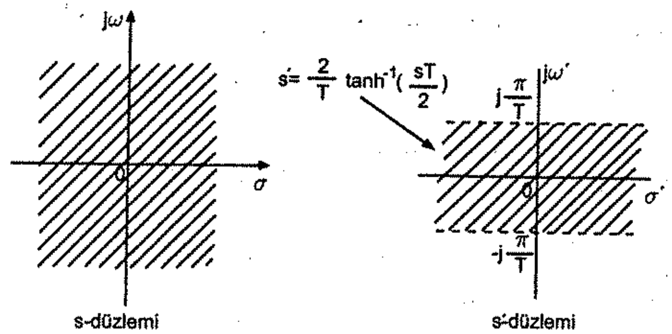
11.4 UYGUNLAŞTIRILMIŞ z-DÖNüŞÜM METODU

IIR süzgeç tasarımında diğer bir yaklaşıklık yöntemi uygunlaştırılmış z-dönüşüm metodudur. Bu metoda göre, (11.17)'deki formda verilen analog transfer fonksiyonuna karşı düşen ayrık-zamanlı transfer fonksiyonu

$$H(z) = (1+z)^L H\frac{\sum_{i=1}^{M}(z-e^{n_i T})}{\sum_{k=1}^{N}(z-e^{d_k T})} \tag{11.24}$$

biçiminde oluşturulur. L bir tamsayıdır. Bu yöntem önceki bölümde açıklanan değiştirilmiş değişmez-impuls cevabı yöntemi ile çok ilgilidir. (11.23) ve (11.24) denklemlerinden aradaki fark

$$\frac{N_1(z)}{N_2(z)} = (1+z)^L \tag{11.25}$$



Şekil 11.4 s-düzleminden s'-düzlemine olan dönüşüm.

olmaktadır. $N_1(z)/N_2(z)$ oranı $(1+z)^L$ ile yer değiştirmektedir. L'nin değeri $H_a(s)$'nin $s=\infty$'daki sıfırlarının sayısına eşittir. Uygunlaştırılmış z-dönüşüm metodu, yüksek geçiren ve bant söndüren süzgeçler için iyi sonuçlar vermektedir.

11.5 BİLİNEER DÖNÜŞÜM

Bölüm 11.2'de değişmez impuls-cevabı metodunda karşılaşılan frekans cevabı örtüşmesini önlemek için, s-düzleminden z- düzlemine birebir (one-to-one) bir dönüşüme ihtiyaç vardır. $z=e^{sT}$ dönüşümü birebir değildir. Çoktan bire (many-to-one) bir dönüşümdür.

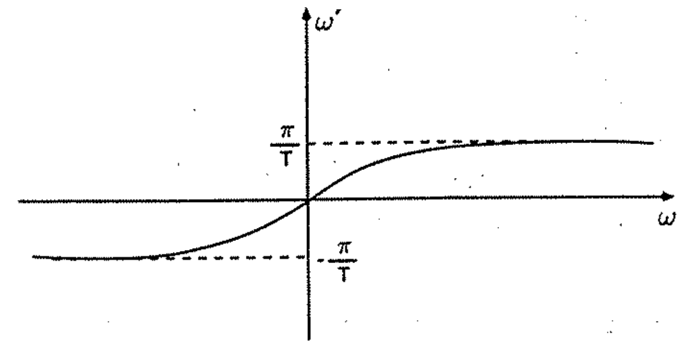
Bu problemi çözebilmek için şöyle bir yöntem izlenir. Önce, tüm s-düzlemini $(-\pi/T) \leqslant Im(s') \leqslant (\pi/T)$ şeridine sıkıştıran $s \to s'$ birebir dönüşümü kullanılır. Daha sonra, $z=e^{s'T}$ ile örtüşme etkisi olmadan s''den z-düzlemine dönüşüm gerçekleştirilir. s-düzleminden z-düzlemine olan bu geçiş Şekil 11.4'te görülmektedir. Bu amaç için $s \to s'$ birebir dönüşümü

$$s' = \frac{2}{T}\tanh^{-1}\left[\frac{sT}{2}\right] \tag{11.26}$$

olarak verilir. Bu dönüşümün $j\omega$-ekseni üzerindeki etkisi (11.26)'da $s=j\omega$ ve $s'=j\omega'$ konularak görülebilir. Buradan,

$$\omega' = \frac{2}{T}\tan^{-1}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \tag{11.27}$$

elde edilir. Şekil 11.5'te tüm $j\omega$ ekseninin $(-\pi/T) \leqslant \omega' \leqslant (\pi/T)$ aralığına sıkışması gösterilmektedir. İstenildiği gibi dönüşüm birebirdir.



Şekil 11.5 Bilineer dönüşüm ile ω'dan ω''ne dönüşüm.

Bulunmaya çalışılan $s \to z$ dönüşümü (11.26)'nın tersinden

$$s = \frac{2}{T}\tanh\left(\frac{s'T}{2}\right) \tag{11.28}$$

ve $z=e^{s'T}$'nin tersinden

$$s' = \frac{1}{T}\ln z \tag{11.29}$$

bulunarak elde edilebilir. Gerçekten, (11.28) ve (11.29) denklemlerinden

$$s = \frac{2}{T}\tanh\left(\frac{\ln z}{2}\right) \tag{11.30}$$

elde edilir. $\tanh x$ fonksiyonunun,

$$\tanh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \tag{11.31}$$

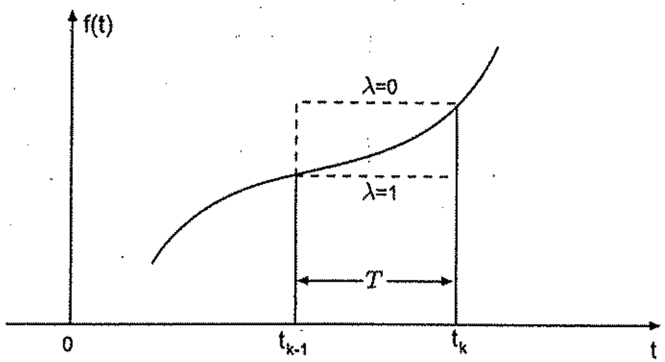
özelliği kullanarak (11.30) ifadesinden

$$s = \left(\frac{2}{T}\right)\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{11.32}$$

bilineer dönüşüm formülü bulunabilir.

O halde, bilineer dönüşüm yardımı ile, analog süzgeç transfer fonksiyonundan sayısal süzgeç tasarlanabilmektedir.

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \tag{11.33}$$



Şekil 11.6 İntegrasyon işleminin yaklaşık hesabı.

(11.32)'de gösterilen bilineer dönüşümü yaklaşıklık metodları ile elde etmek mümkündür. Burada,

$$f(t) = dy(t)/dt \tag{11.34}$$

$$dy(t) = f(t)dt \tag{11.35}$$

gözönüne alınarak,

$$\int_{y(k-1)}^{y(k)} dy = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt \tag{11.36}$$

yazılabilir. (11.36)'daki integral işlemi Şekil 11.6'da gösterildiği üzere yaklaşık olarak hesaplanabilir.

$$y(k) = y(k-1) + T[\lambda f(t_{k-1}) + (1-\lambda)f(t_k)] \tag{11.37}$$

iki tarafın z-dönüşümü alınarak,

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + T\left[(z^{-1}-1)\lambda + F(z)\right] \tag{11.38}$$

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{T\left[(z^{-1}-1)\lambda + 1\right]}{(1-z^{-1})} \tag{11.39}$$

Trapezoidal kurala göre hesaplanacak olursa, (11.39)'dan

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \left(\frac{T}{2}\right)\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \tag{11.40}$$

bulunur. Ayrıca (11.34) ifadesinin $\mathscr{L}$-dönüşümü

$$F(s) = sY(s) \tag{11.41}$$

Tablo 11.1 İntegrasyon için Yaklaşıklık

$\lambda = 0$ (İleri yol Euler)	$\lambda = 1$ (Geri yol Euler)	$\lambda = 1/2$ (Trapezoidal)
$y_k = y_{k-1} + Tf(t_k)$	$y_k = y_{k-1} + Tf(t_{k-1})$	$y_k = y_{k-1} + \frac{T}{2}[f(t_{k-1}) - f($
$f(t_k) = \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$	$f(t_{k-1}) = \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$	$\frac{f(t_{k-1}) + f(t_k)}{2} = \frac{y_k - y_{k-}}{T}$
$s \longleftrightarrow \frac{1}{T}(1-z^{-1})$	$s \longleftrightarrow \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} = \frac{z-1}{T}$	$s \longleftrightarrow \left(\frac{2}{T}\right)\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
$z \longleftrightarrow \frac{1}{1-Ts}$	$z \longleftrightarrow 1 + Ts$	$z \longleftrightarrow \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$ (Bilineer Dönüşüm)

veya

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{s} \tag{11.42}$$

olur. O halde, (11.40) ve (11.42)'den

$$s \longleftrightarrow \left(\frac{2}{T}\right)\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{11.43}$$

$$z \longleftrightarrow \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s} \tag{11.44}$$

bulunur. (11.43) ve (11.44)'den bilineer dönüşümün cebrik, birebir ve tersi alınabilir olduğu açık olarak görülmektedir.

Açıklama 11.3 (11.37)'de yaklaşık integral hesabında $\lambda = (1/2)$ alınarak trapezoidal yöntem kullanılmıştır. Bunun sonucunda bilineer dönüşüm elde edilmektedir. $\lambda = 1$ veya $\lambda = 0$ alınarak sırası ile geriyol veya ileri yol Euler metodlarına göre de integral hesaplanabilir. Bunun sonucu bulunacak dönüşüm ifadeleri Tablo 11.1'de gösterilmiştir.

11.5.1 Bilineer Dönüşümün Özellikleri

Bilineer dönüşümün özellikleri şöyle özetlenebilir:

1. Sağ-yarı s-düzlem bölgesi, z-düzleminde $|z| = 1$ birim dairesi dışındaki noktalara karşı düşer.

2. s-düzleminde $j\omega$ ekseni üzerindeki noktalar, z-düzleminde $|z| = 1$ birim dairesi üzerine karşı düşer.

3. Sol-yarı s-düzlem bölgesi, z-düzleminde $|z| = 1$ birim dairesi içindeki noktalara karşı düşer.

Analog frekans ω ile sayısal frekans Ω arasındaki doğrusal olmayan ilişkiyi (11.43)'den elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{2}{T}\right)\frac{1-e^{-j\Omega}}{1+e^{-j\Omega}} \\ &= \left(\frac{2}{T}\right)\frac{j\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} = \left(\frac{2}{T}\right)j\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) = j\omega \end{aligned} \tag{11.45}$$

Buradan,

$$\omega = \left(\frac{2}{T}\right)\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \tag{11.46}$$

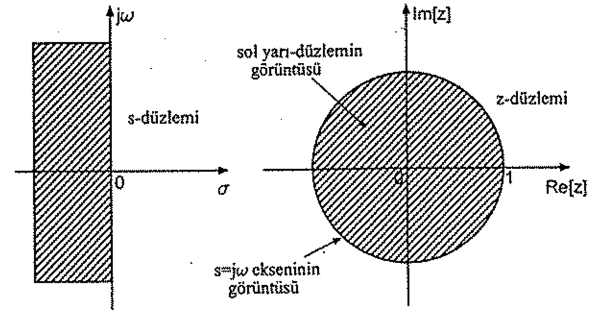
bulunur. O halde, $\omega = 0$ için $\Omega = 0$ olmaktadır. Yani, s-domeninde orijin z-düzleminde $(1, 0)$ noktasına karşı düşmektedir. Ayrıca, $\omega \to \pm\infty$ iken $\Omega \to \pm\pi$ olmaktadır. s-düzlemindeki pozitif ve negatif $j\omega$-ekseni sırası ile $|z| = 1$ dairesinin üst ve alt yarı dairelerine karşı düşmektedir. Şekil 11.7'de bilineer dönüşüm gösterilmektedir.

Açıklama 11.4

1. Bilineer dönüşümün ikinci özelliğinden, $|H_a(\omega)|$'nın maksimum ve minimumlarının $|H(e^{j\Omega})|$'da korunacağı anlaşılır. Sonuç olarak, analog süzgecin geçirme ve durdurma bandı özellikleri sayısal süzgecin geçirme ve durdurma bandında da görülecektir.

2. Üçüncü özellikten, kararlı analog süzgecin kararlı sayısal süzgeç transfer fonksiyonu vereceği görülmektedir. Ayrıca, bilineer dönüşüm gerçel katsayılı olduğundan, $H(z)$ gerçel katsayılı olarak bulunacaktır.

3. Dönüşüm sonucu elde edilen $H(z)$'nin pay derecesi paydanın derecesinden büyük olamaz. O halde, $H(z)$ gerçeklenebilir bir fonksiyondur. Nedensellik korunmaktadır.



Şekil 11.7 Bilineer dönüşüm kullanılarak s-düzleminden z-düzlemine geçiş. Analog frekans eksenine birim daire karşı düşmektedir.

4. Bilineer dönüşümün dezavantajlarından birisi impuls cevabının korunmamasıdır.

5. Analog süzgecin frekans cevabında oluşan bozulmalar aşağıdaki bölümde ayrıntılı olarak incelenecektir.

11.5.2 Sarma Etkisi ve Önsarma

ω ve Ω sırası ile analog ve sayısal süzgecin frekans değişkenlerini gösterirse, (11.33)'de belirtilen bilineer dönüşümün bu iki frekans arasında getirdiği ilişki

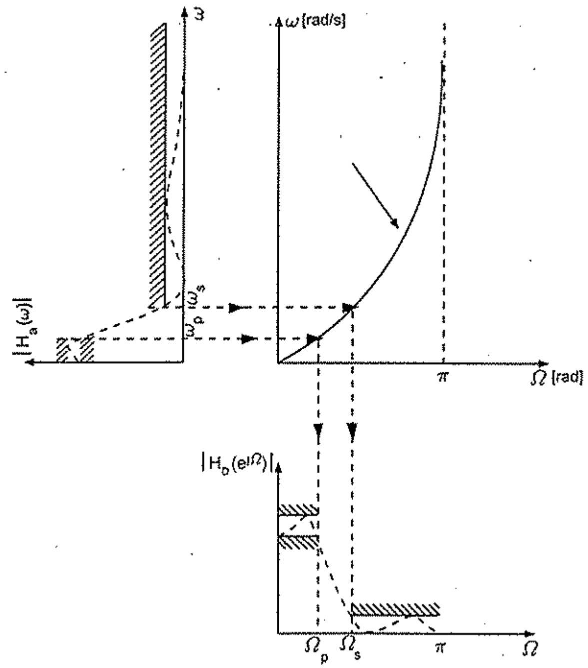
$$\omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \tag{11.47}$$

olmaktadır. $\Omega < 0.3\pi$ için,

$$\omega \approx \Omega/T \tag{11.48}$$

yazılabilir. Sonuç olarak, alçak frekanslarda $(\Omega < 0.3\pi)$ sayısal süzgecin genlik cevabının yaklaşık olarak analog süzgecin cevabıyla aynı olacağı görülmektedir. Yani, geçiş yaklaşık olarak doğrusaldır. Buna karşılık, yüksek frekanslar için ω ve Ω arasındaki ilişki doğrusal değildir. Sayısal süzgeçte frekansa bağlı olarak ortaya çıkan bu bozulma Şekil 11.8'de görülmektedir. Bu bozulma sarma (wrapping) etkisi olarak bilinir.

Sarma etkisinin genlik cevabı üzerinde oluşturduğu bozulmayı gösterebilmek için eşit geçirme bandı aralıklarına sahip bir analog süzgeci gözönüne alalım. Bilineer dönüşümü ile elde edilen sayısal süzgecin frekans cevabı oldukça farklı olacaktır. Sayısal süzgecin yüksek frekanslarda geçirme bantlarının merkez frekansları ve bant genişlikleri azalacaktır. Yani eşit aralıklı



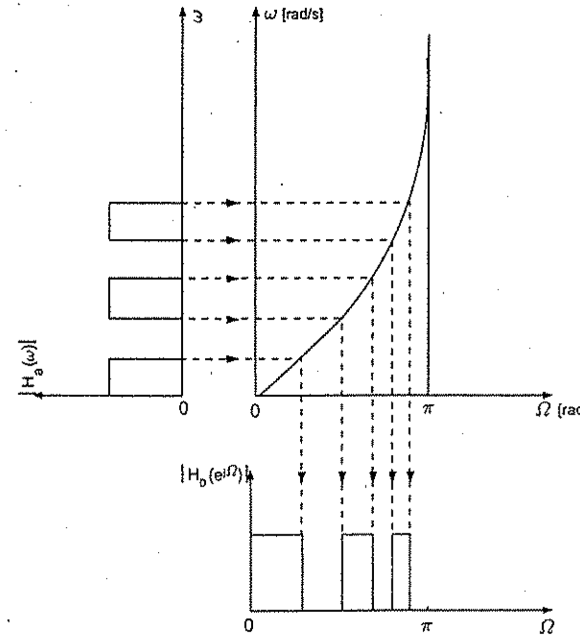
Şekil 11.8 $H(j\omega)$'dan $H(e^{j\Omega})$'ya bilineer dönüşümün gösterilimi.

olan merkez frekansları, frekans arttıkça birbirine yaklaşacaktır. Ayrıca eşit olan geçirme bant genişlikleri de frekans yükseldikçe küçülecektir. Şekil 11.9'da bu bozulma görülmektedir. Eğer sadece genlik cevabı ile ilgileniliyorsa, sarma etkisi analog süzgece önsarma (prewrapping) yöntemi uygulanarak giderilebilir. Örneğin, geçirme ve durdurma bant kenarları sırası ile Ω_p ve Ω_s olan bir sayısal süzgeç tasarlanması için bu değerlere aşağıdaki şekilde önsarma uygulanır.

$$\omega_p = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right) \tag{11.49}$$

$$\omega_s = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega_s}{2}\right) \tag{11.50}$$

Önsarmanın amacı, bilineer dönüşüm sonucu istenilen Ω_p ve Ω_s sayısal kesim frekanslarını verecek analog süzgecin uygun ω_p ve ω_s analog kesim frekanslarını



Şekil 11.9. Sarma etkisinin genlik cevabında yol açtığı bozulma.

bulmaktır. Gerçekten, (11.47)'den

$$\Omega_p' = 2\tan^{-1}\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) \tag{11.51}$$

$$\Omega_s' = 2\tan^{-1}\left(\frac{\omega_s T}{2}\right) \tag{11.52}$$

olur. Bu koşullar altında,

$$\Omega_p = \Omega_p' \tag{11.53}$$

$$\Omega_s = \Omega_s' \tag{11.54}$$

elde edilir. Böylece önsarma, sarma etkisini hesaba katarak, tasarlanan sayısal süzgecin istenen karakteristiklere uymasını sağlar. Bilineer dönüşümde yer alan $\frac{2}{T}$ katsayısı tasarımı etkilememektedir. Bu katsayı tasarımı basitleştirecek şekilde istenen herhangi bir sabit sayı olarak seçilebilir. Ancak bir kere bu katsayıyı sabitledikten sonra tasarım süreci boyunca aynı sabit sayıyı kullanmaya dikkat edilmelidir. Şimdi, bilineer dönüşümü kullanarak sayısal süzgeç tasarımındaki aşamaları bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 11.3 Aşağıdaki özelliklerde bir sayısal alçak geçiren süzgeç tasarlayalım.

- Örnekleme frekansı: $F_s = 8\ kHz$
- Geçirme bandı: 0'dan 1.3 kHz'e kadar ($f_p = 1.3\ kHz$).
- Geçirme bandındaki maksimum dalgalanma: $\delta_p = \pm 0.1$ dB.
- Durdurma bandı: 2.6 kHz'den sonrası ($f_s = 2.6\ kHz$).
- Durdurma bandındaki minimum zayıflama: $\delta_s = 33.5$ dB.

Tasarıma başlamadan önce, analog frekans cinsinden verilen geçirme ve durdurma bantı kesim frekanslarını (f_p, f_s) sayısal frekans cinsinden yazalım.

Örnekleme frekansı $\Omega = 2\pi$'ye karşı düşmektedir. Sayısal frekans cinsinden belirlemede $\omega T = \Omega$ bağıntısından yararlanılır. Buradan,

$$\Omega = \frac{\omega}{F_s} = 2\pi\frac{f}{F_s} \tag{11.55}$$

elde edilir. (11.55)'den $f_p = 1.3\ kHz$ ve $fs = 2.6\ kHz$ analog frekanslarına karşı düşen sayısal frekanslar,

$$\Omega_p = 2\pi\frac{f_p}{F_s} = 2\pi\frac{1.3kHz}{8.0kHz} = 1.021 \text{ rad} \tag{11.56}$$

$$\Omega_s = 2\pi\frac{f_s}{F_s} = 2\pi\frac{2.6kHz}{8.0kHz} = 2.042 \text{ rad} \tag{11.57}$$

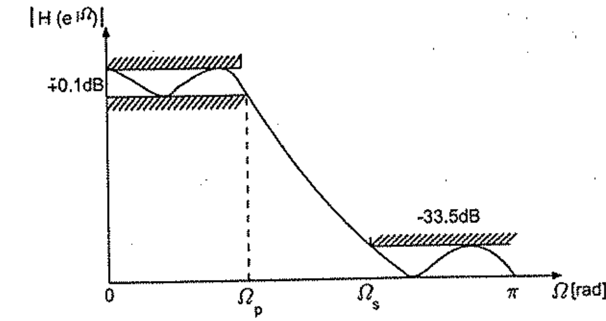
olarak bulunur. Bu özellikler Şekil 11.10'da görülmektedir.

1. Adım

Bilineer dönüşüm uygulandıktan sonra, tasarım özelliklerini sağlayacak analog süzgecin eşdeğer özellikleri belirlenir.

Analog alçak geçiren süzgecin geçirme bandı ve kesim frekansı $\omega_p = 1$ rad/san olarak seçilir. O halde, (11.47), (11.56) ve (11.57)'den

$$\omega_p = 1 = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right) = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{1.021}{2}\right) \tag{11.58}$$



Şekil 11.10 Alçak geçiren süzgecin özellikleri: $\Omega_p = 1.021$ rad, $\Omega_s = 2.042$ rad, $\delta_1 = \pm 0.1$ dB ve $\delta_2 = -33.5$ dB.

$$\omega_s = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega_s}{2}\right) = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{2.042}{2}\right) \tag{11.59}$$

yazılabilir. (11.58) ve (11.59) ifadelerinden analog süzgecin durdurma kesim frekansı

$$\frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{\tan\left(\frac{1.021}{2}\right)}{\tan\left(\frac{2.042}{2}\right)} \tag{11.60}$$

$$\omega_s = \omega_p\frac{\tan\left(\frac{2.042}{2}\right)}{\tan\left(\frac{1.021}{2}\right)} = 1\frac{1.6319}{0.5600} = 2.9139 \text{ rad/san} \tag{11.61}$$

olur.

Sonuç olarak, bilineer dönüşüm için gerekli $(2/T)$ katsayısı

$$\omega_p = (2/T)\tan(\Omega_p/2) \tag{11.62}$$

$$(2/T) = \cot(\Omega_p/2) = \cot(1.021/2) = 1.79 \tag{11.63}$$

olarak bulunacaktır. Buradan kullanılacak bilineer dönüşüm

$$s = 1.79\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{11.64}$$

olarak elde edilir.

2. Adım

Önceki adımda belirlenen analog süzgeç karakteristikleri şunlardır.

1. $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ arasındaki geçirme bandında maksimum dalgalanma 0.1 dB'dir.
2. $2.9139 \leqslant \omega < \infty$ arasındaki durdurma bandında minimum zayıflatma 33.5 dB'dir.

Bu özellikleri sağlayan analog süzgeci birçok analog süzgeç tasarım kitaplarında [7, 8] bulmak mümkündür. Transfer fonksiyonu

$$H_a(s) = \frac{s^2 + 10.2089}{5.8881(s + 1.0398)(s^2 + 0.8700s + 1.6674)} \tag{11.65}$$

olan üçüncü derece eliptik süzgeç yukarıdaki özellikleri sağlar.

3. Adım

(11.64)'de bulunan bilineer dönüşüm (11.65)'deki analog süzgeç transfer fonksiyonunda yerine konularak $H(z)$ elde edilir.

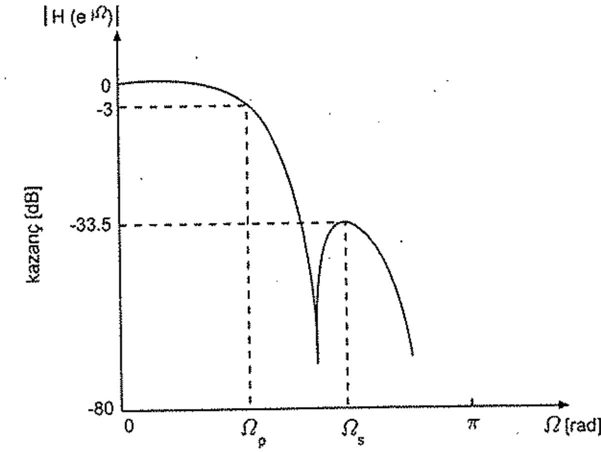
$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=1.79\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \tag{11.66}$$

$$H(z) = \frac{0.1256(1 + 1.0478z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-1})}{(1 - 0.2640z^{-1})(1 - 0.4748z^{-2})} \tag{11.67}$$

Bu sayısal süzgecin genlik cevabı Şekil 11.11'de görülmektedir.

REFERANSLAR

1. Digital Signal Processing Committee ed., *Programs for Digital Signal Processing*, IEEE Press, New York, 1979.
2. A. G. Deczky, "Synthesis of Recursive Digital Filters Using the Minimum P-Error Criterion", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, vol. AU-20 PP. 257-263, October 1972.
3. C. Charalambous, "Minimax Optimization of Recursive Digital Filters Using Recent Minimax Results", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-23, pp. 333-345, 1975.
4. A. Antoniou, *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1979.



Şekil 11.11 Bilineer dönüşüm ile elde edilen sayısal süzgecin genlik cevabı.

5. A. Peled and B. Liu, *Digital Signal Processing: Theory, Design, and Implementation*, John Wiley, New York, 1976.
6. L. B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, . Kluwer Academic Publishers, 1996.
7. E.A. Guillemin, *Synthesis of Passive Networks*, Wiley, New York, 1957.
8. N. Balabanian, *Network Synthesis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1958.
9. V. K. Ingle ve John G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB*, Brooks Cole, 1999.

PROBLEMLER

11.1 Aşağıda analog transfer fonksiyonuna eşdeğer sayısal süzgeç tasarlanmak istenmektedir.

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Örnekleme aralığı $T = \pi/5$ kabul ederek istenilen IIR sayısal süzgeci,

a) Değişmez-impuls-cevabı metoduna göre,

b) Tablo 11.1'de gösterilen ileri yol Euler yaklaşıklığı ile,

c) Bilineer dönüşüm ile önsarmasız olarak tasarlayınız.

$$s = \left(\frac{2}{T}\right)\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

d) (c)'de tasarlanan sayısal süzgecin kesim frekansı $\omega_c = 1$ rad/s olacak şekilde önsarmalı olarak tekrar tasarlayınız.

11.2 Frekans domeninde rezonans tipi karakteristiği olan analog bant geçiren süzgecin transfer fonksiyonu,

$$H(s) = \frac{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2}$$

olarak verildiğine göre,

a) Örnekleme frekansı $F_s = 200\ kHz$, $f_0 = 40\ kHz$ ve $Q = 5.0$ için bilineer dönüşüm ile eşdeğer sayısal süzgecin katsayılarını belirleyiniz.

b) Yukarıda elde edilen sayısal bant geçiren süzgecin merkez frekansını bulunuz.

c) Sayısal süzgecin merkez frekansının tam olarak 40 kHz'de olması için önsarma ile tasarımı tekrarlayınız. Yeniden tasarlanan süzgecin katsayılarını bulunuz.

11.3 Bir analog transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{s^2+1}{(s+0.1)^2+1}$$

olarak verildiğine göre,

a) s-düzleminde sıfır ve kutuplarını gösteriniz. $|H(\omega)|$'yı çiziniz.

b) Bilineer dönüşümü kullanarak, $\omega_B = 1$ rad/san için $\Omega_B = 10/(2\pi)$ rad olacak biçimde bu transfer fonksiyonuna eşdeğer olan sayısal süzgeci belirleyiniz.

c) $H(z)$'nin sıfırı ve kutuplarını z-düzleminde gösteriniz. $|H(e^{j\Omega})|$ çiziniz.

11.4 Bilineer dönüşümü kullanarak 3-dB kesim frekansı 1500 Hz olan yüksek geçiren sayısal süzgeci tasarlayınız. Örnekleme frekansı 6 kHz olarak alınacaktır. Tasarladığınız süzgecin transfer fonksiyonunu aşağıdaki şekilde veriniz ($a_0 = 1$).

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Süzgecin istenen kesim frekansı özelliğini sağladığını kontrol ediniz. Analog prototip süzgeç olarak birinci dereceden alçak geçiren Butterworth süzgecini kullanabilirsiniz.

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Bu süzgecin 3-dB kesim frekansı 1 rad/san frekansındadır. Bu süzgeci ω_c kesim frekansına sahip bir analog yüksek geçiren süzgece dönüştürmek için $s \to \frac{\Omega_c}{s}$ dönüşümünü kullanabilirsiniz.

MATLAB UYGULAMALARI

M11.1 Analog frekans ω ile sayısal frekans Ω arasında bilineer dönüşümce belirlenen ilişkiyi çizdiriniz. $(2/T)$ için birçok değer kullanınız ve eğrileri beraberce çiziniz. Eğer analog bir prototip için kesim frekansı $\omega_c = 1$ rad/san ise, sayısal kesim frekansı Ω_c, T arttıkça nasıl değişecektir?

M11.2 Bilineer dönüşüm MATLAB kullanılarak gerçeklenebilir.

a) 4. derece, alçak geçiren, ayrık-zamanlı bir Butterworth süzgeci tasarlamak istiyoruz. Örnekleme frekansı 40 kHz ve bant kenarı 8 kHz olarak isteniyor. Önsarmalı analog bant kenarı frekansı nedir?

b) Önsarma analog bant kenarını kullanarak 4. derece Butterworth analog süzgecin Laplace dönüşümünü bulunuz. Bunu kendiniz veya MATLAB'de `buttap` komutunu kullanarak yapabilirsiniz. ω_c kesim frekanslı N. dereceden analog alçak geçiren Butterworth süzgeci için transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir.

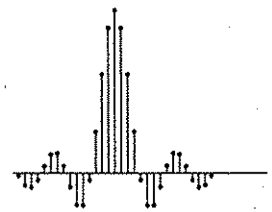
$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$H(s) = \frac{\omega_c^N}{\prod_{\ell=1}^{N}(s - p_\ell)}$$

Burada analog Butterworth süzgecin kutupları $p_\ell = \omega_c e^{j[\pi(N+2\ell-1)/(2N)]}$, $\ell = 1 \ldots N$ olmaktadır.

c) Bulduğunuz sürekli zaman transfer fonksiyonuna bilineer dönüşüm uygulayarak aradığımız sayısal süzgeçin z-dönüşümünü bulun. Bunu kendi yazdığınız bir program veya MATLAB'de `bilinear` komutunu kullanarak yapabilirsiniz. Bu sonucu MATLAB'de `butter` komutuyla doğrudan yapılan tasarımla karşılaştırınız.

M11.3 Problem 11.1 a), c), d) şıklarını MATLAB kullanarak tekrarlayınız. Bazı faydalı Signal Processing Toolbox komutları:
`buttap butter buttord bilinear freqs freqz`



Bölüm 12

SAYISAL SÜZGEÇLERİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

12.1 GİRİŞ

Sayısal süzgeçlerin gerçekleştirilmesi yazılım veya donanım olmak üzere iki biçimde olabilir. Yazılım yönteminde bir sayısal bilgisayar süzgeci simüle etmekte kullanılır. Donanımsal gerçeklemede ise, sayısal süzgecin devre yapısı özel amaçlı bir aygıta dönüştürülür.

Bölüm 2'de tartışıldığı gibi, doğrusal zamanla-değişmeyen nedensel süzgeçler konvolüsyon toplamı, fark denklemi veya durum denklemleri ile tanımlanabilir. Bunlardan en yaygın olarak kullanılanı konvolüsyon toplamı

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m)x(m) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m) \tag{12.1}$$

veya fark-denklemi gösterilimidir:

$$\begin{aligned} y(n) &= a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \ldots + a_M x(n-M) \\ &\quad - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2) - \ldots - b_N y(n-N) \end{aligned} \tag{12.2}$$

Bu denklemler matematiksel olarak eşdeğer olmalarına karşılık gerçekleştirmede eşdeğer olmaları zorunlu değildir. Gerçekleştirmede, toplama ve çarpma işlem sayısı, gerekli bellek elemanı miktarı ve sınırlı kelime uzunluğuna olan duyarlılık gibi faktörler dikkate alınmak zorundadır. Bu nedenle, denklemlerden biri diğerine tercih edilebilir. Bu bölümde, öncelikle bu problem tartışılacaktır.

Ayrıca (12.1) ve (12.2) denklemlerine ek olarak, sayısal süzgeci transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-n}} X(z) \end{aligned} \tag{12.3}$$

yardımıyla da belirleyebiliriz. Sayısal süzgecin devre topolojisi özelliklerini gözönüne alarak çeşitli gerçekleştirme metodları kullanılabilir. Blok diyagramları ile eşdeğer devre yapısı metodları yine bu bölümde incelenecektir.

12.2 AFD YARDIMIYLA KONVOLÜSYON

Bu bölümde (12.1)'de gösterilen konvolüsyon işleminin Ayrık-Fourier Dönüşümü (AFD) yardımı ile gerçekleştirilmesi tartışılacaktır. Öncelikle iki sonlu dizinin konvolüsyonu, daha sonra da sonlu bir dizi ile sonsuz uzunlukta bir dizinin konvolüsyonu ele alınacaktır.

12.2.1 İki Sonlu Dizinin Konvolüsyonu

$\{h(i)\}_{i=0}^{P-1}$ ve $\{u(j)\}_{j=0}^{Q-1}$ sonlu uzunlukta sağ taraflı iki diziyi ele alalım. $\{h(i)\}$ ve $\{u(j)\}$ dizilerinin doğrusal konvolüsyonu

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{Q-1} h(n-m)u(m) & 0 \leqslant n \leqslant P+Q-1 \\ 0 & \text{dışında} \end{cases} \tag{12.4}$$

olarak tanımlanır. Ayrık-Fourier Dönüşümünün bu farklı uzunlukta iki diziye uygulanabilmesi için, dizilerin uzunlukları eşit olacak şekilde değiştirilmelidir. Bu değişiklik kısa olan diziye sıfırlar ilavesi ile mümkün olur ve sıfır dolgulama (zero-padding) olarak adlandırılır. $P < Q$ ise, sıfır dolgulanmış $h'(i)$ şöyle tanımlanır.

$$h'(i) = \begin{cases} h(i) & 0 \leqslant i \leqslant P-1 \\ 0 & P \leqslant i \leqslant Q-1 \end{cases} \tag{12.5}$$

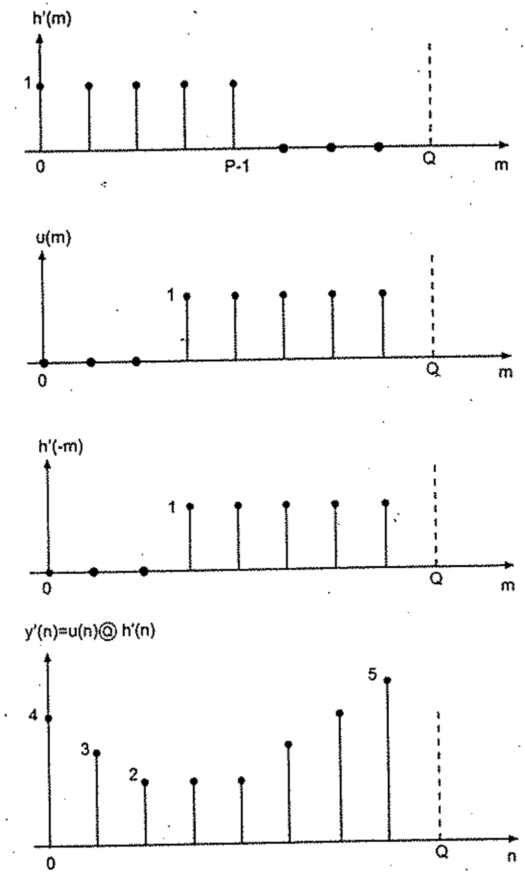
$\{h'(i)\}$ ve $\{u(i)\}$ dizilerinin AFD'lerini sırası ile H'_k ve U_k ile gösterelim. Bundan sonra,

$$Y'_k = U_k H'_k \tag{12.6}$$

hesaplanır ve ters AFD ile

$$\begin{aligned} y'(n) &= AFD^{-1}[U_k H'_k] \\ &= \left[\sum_{m=0}^{Q-1} h'(n-m)u(m)\right]_P = h'(n) \circledQ u(n) \end{aligned} \tag{12.7}$$

bulunur. (12.7) denkleminde Ⓠ sembolü ile gösterilen işlemin periyodik (dairesel) bir konvolüsyon olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durum, AFD'nin Bölüm 3.7'de açıklandığı üzere periyodik olma özelliğinin doğrudan bir sonucudur.



Şekil 12.1 $u(m)$ ve $h'(m)$ dizilerinin dairesel konvolüsyonu.

O halde, $\{h'(i)\}$ ve $\{u(i)\}$ periyotları Q olacak şekilde periyodik iki dizi olarak düşünülmelidir. Bunun sonucu, (12.7)'de hesaplanan $y'(n)$ ile (12.4)'de hesaplanan doğrusal konvolüsyon $y(n)$ aynı olmak zorunda değildir. Gerçekten Şekil 12.1'de gösterilen iki dizinin periyodik (dairesel) konvolüsyonu doğrusal konvolüsyonlarından farklıdır.

Şekil 12.1'den de görüleceği üzere, bu farklılığın nedeni $h'(-m)$'nin periyodik bölümlerinin $(0, Q-1)$ aralığında $u(m)$ ile sıfırdan farklı kesişmesidir. Şekil 12.1'de dairesel $\{h'(-m)\}$'nin $\{u(m)\}$ ile kesişimi açık olarak görülmektedir.

Daha uzun dizi uzunluğu seçilerek bu güçlüğün üstesinden gelinebilir. Böylece kesişme bölgesi sıfır olduğundan dairesel konvolüsyon doğrusal konvolüsyona eşit olacaktır. Bu koşulu sağlayan seçilebilecek en küçük dizi uzunluğu N

$$N \geqslant P + Q - 1 \tag{12.8}$$

şartını sağlamalıdır. O halde, dizilerin sonuna sıfır dolgulayarak $\{h(i)\}$ ve $\{u(i)\}$ dizileri yeniden tanımlanır.

$$h'(i) = \begin{cases} h(i) & 0, 1, \ldots, P-1 \\ 0 & i = P, P+1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{12.9}$$

$$u'(i) = \begin{cases} u(i) & 0, 1, \ldots, Q-1 \\ 0 & i = Q, Q+1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{12.10}$$

$h'(i)$ ve $u'(i)$'nin AFD'leri H'_k ve U'_k ise,

$$\begin{aligned} y'(n) &= AFD^{-1}[H'_k U'_k] \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} h'(n-m)u'(m)\right]_p = h'(n) \circledN u'(n) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h(n-m)u(m) = y(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \text{ için} \end{aligned} \tag{12.11}$$

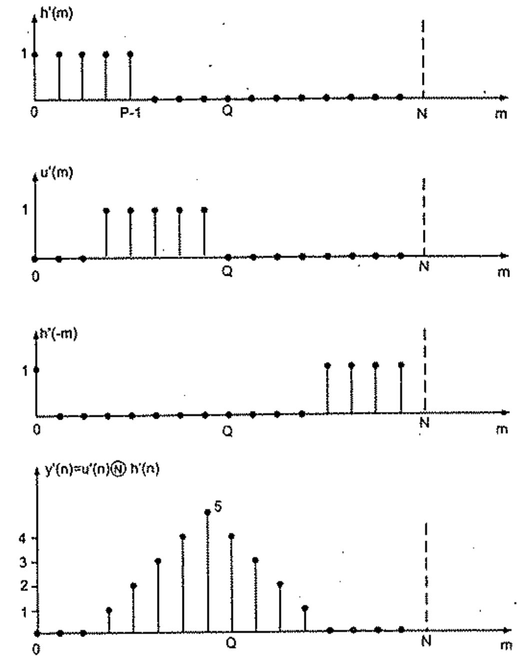
olduğu gösterilebilir. Şekil 12.2'de bu durum açık olarak görülmektedir. Yani, N yeterince büyük seçilirse $h(-m)$'nin periyodik bölümleri $[0, Q-1]$ aralığında $u(m)$ ile kesişmeyecektir. Böylece, $(0, N-1)$ aralığında dairesel konvolüsyon doğrusal konvolüsyona indirgenmektedir.

(12.11)'de elde edilen sonuçtan, iki sonlu dizinin doğrusal konvolüsyonunun AFD ve dolayısıyla HFD kullanılarak hesaplanabileceği görülmektedir.

Örnek 12.1 $x(m)$ Şekil 12.3'te görüldüğü gibi sonlu bir dizi $(Q = 5)$ ve $h(m) = \delta(m-1)$ $(P = 2)$ olarak verilsin. Burada, $h(m)$'de uzunluğu $N = 5$ olan sonlu bir dizi olarak ele alınabilir.

$$h(m) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant m < 1 \\ 1 & m = 1 \\ 0 & 1 < m \leqslant 4 \end{cases} \tag{12.12}$$

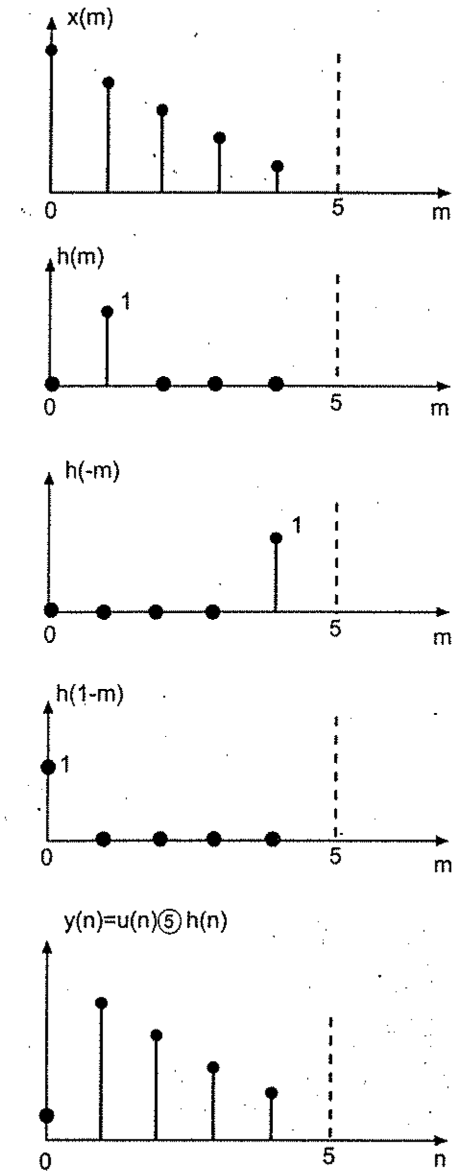
$h(n)$'nin Ayrık-Fourier Dönüşümü $H_k = W_5^k$ olur. 5 periyodu ile periyodikleştirilmiş $x(m)$ ve $h(m)$ dizilerinin dairesel konvolüsyonu olan $y_5(n)$ dizisinin AFD'si



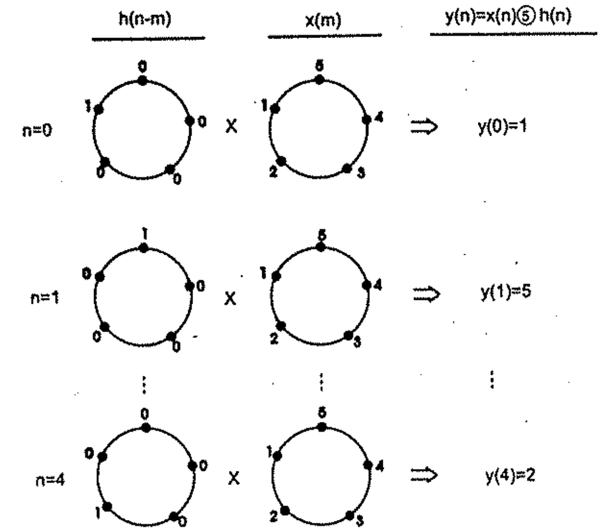
Şekil 12.2 Şekil 12.1'deki dizilere sıfırlar ilavesi dairesel konvolüsyonu doğrusal konvolüsyona eşdeğer yapmaktadır.

$Y_k = W_5^k X^k$ olarak elde edilir. Ters AFD alınınca $y(n)$ dizisi Şekil 12.3'teki gibi oluşur. Bulunan $y_5(n)$ dizisinin $x(m)$ ile $h(m)$ dizilerinin doğrusal konvolüsyonundan farklı olduğu görülmektedir. Bunun sebebi dairesel konvolüsyon için periyot uzunluğunu yeterince uzun almamamızdır $(5 < P + Q - 1 = 6)$. Eğer dairesel konvolüsyon için periyot uzunluğunu 6 yada daha büyük seçersek doğrusal konvolüsyonu aynen buluruz.

Doğrusal konvolüsyon için temel operasyon $x(m)$ ile $h(-m)$'nin geciktirilmiş versiyonlarının çarpımlarının toplanmasıdır. Konvolüsyon sonucu değerleri bulabilmek için $h(-m)$ dizisi $x(m)$ üzerinde kaydırılır. Halbuki, (12.7)'deki dairesel konvolüsyon için, diziler bir daire üzerine yerleştirilir. Bu gösterilimde $h(-m)$ dizisinin $x(m)$'ye göre ters yönde yerleştirileceği açıktır. Dairesel konvolüsyon değerlerini elde etmek için bir daire üzerindeki değerler ile diğer bir daire üzerindeki karşı gelen noktalardaki değerler çarpılarak toplanır. Birbirini takip eden değerleri elde etmek için, dairelerden biri diğerine göre döndürülür.



Şekil 12.3 $x(m)$ ve $h(m)$ dizilerinin dairesel konvolüsyonu.



Şekil 12.4 Şekil 12.3'teki dizilerin dairesel konvolüsyonunun daireler üzerinde adım adım bulunması.

Şekil 12.4'te $x(n)$ ve $h(n)$ dizilerinin dairesel konvolüsyonu adım adım gösterilmektedir.

Örnek 12.2 Dairesel konvolüsyona diğer bir örnek olarak,

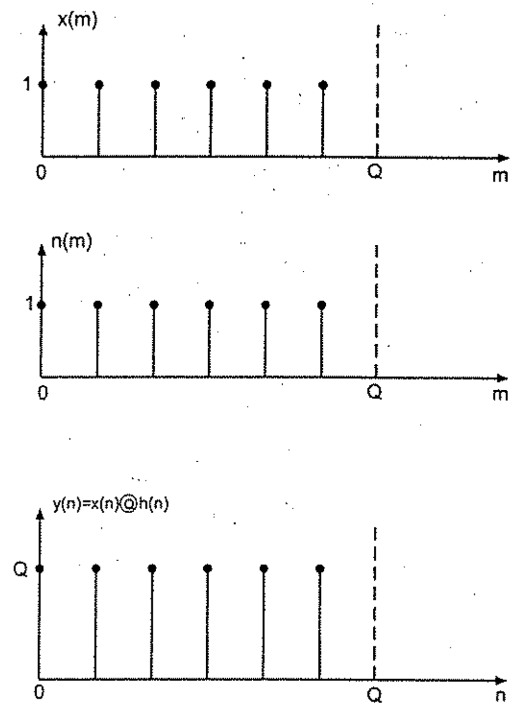
$$x(m) = h(m) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant m \leqslant Q-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \tag{12.13}$$

dizilerini ele alalım. (12.13)'deki dizilerin Ayrık-Fourier Dönüşümleri

$$\begin{aligned} X_k = H_k &= \sum_{m=0}^{Q-1} W_Q^{nk} \\ &= \begin{cases} Q & k=0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \end{aligned} \tag{12.14}$$

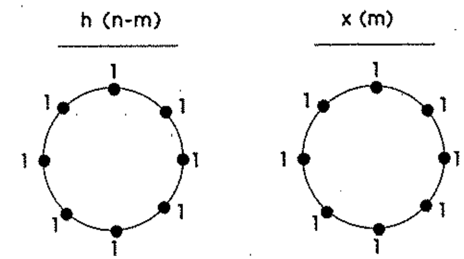
olarak bulunur. O halde, $x(m)Ⓠh(m)$ dairesel konvolüsyonu sonucu bulunan $y(n)$ dizisi ters AFD'den

$$y(n) = Q, \quad 0 \leqslant n \leqslant Q-1 \tag{12.15}$$



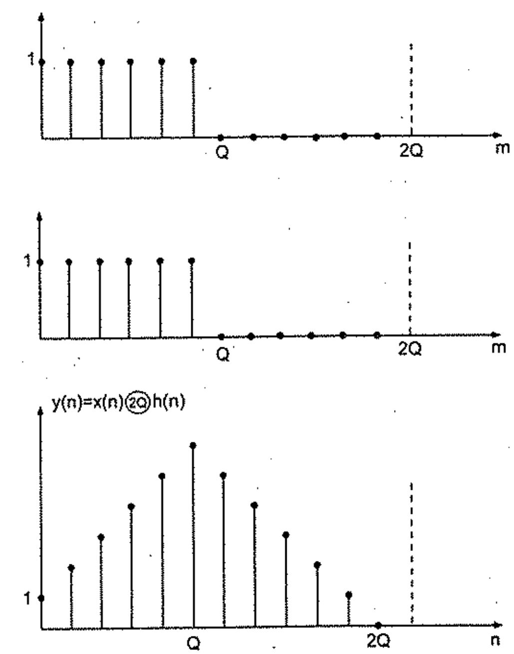
Şekil 12.5 İki dikdörtgen dizinin Q-noktalı dairesel konvolüsyonu.

olarak elde edilir. Şekil 12.5'te $x(m)$ ve $h(m)$ dizilerinin dairesel konvolüsyonu görülmektedir. Şekil 12.6'da daire üzerine yerleştirilen değerlerle bu sonucu doğrulamak mümkündür. (12.15)'de gösterilen dairesel konvolüsyonun doğrusal konvolüsyona eşit olmadığı açıktır. Ancak, $x(m)$ ve $h(m)$ dizilerine Q adet sıfır ilave edilerek $2Q$ uzunluğunda diziler durumuna getirilebilirler. Bu uzatılmış dizilere $2Q$-noktalı dairesel konvolüsyon uygulanır ise elde edilen dizi $x(m)$ ve $h(m)$ dizilerinin doğrusal konvolüsyonuna eşit olacaktır. $Q = 6$ için Şekil 12.7'de bu durum görülmektedir. Dairesel konvolüsyon periyodunun doğrusal konvolüsyonun uzunluğundan daha uzun olması nedeniyle çakışma ortaya çıkmamaktadır.

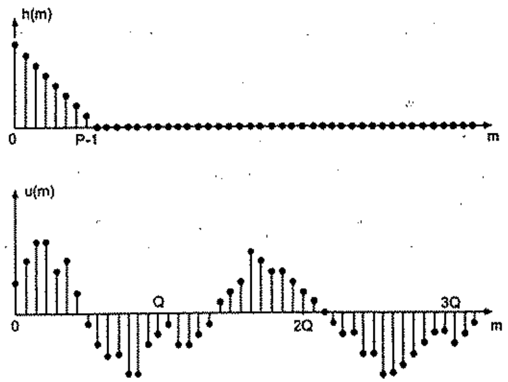


$$y(n)=\sum_{m=0}^{Q-1} h(k-m)x(m)=1\cdot 1+1\cdot 1+\ldots+1\cdot 1=Q$$

Şekil 12.6 Şekil 12.5'te verilen dizilerin dairesel konvolüsyonunun grafiksel gösterilimi.



Şekil 12.7 Şekil 12.5'teki dizilere sıfırlar ilavesi dairesel konvolüsyonu doğrusal konvolüsyona eşdeğer yapmaktadır.



Şekil 12.8 Sonlu uzunluklu $h(m)$ dizisi ile sonsuz uzunlukta $u(m)$ dizisi.

12.2.2 Sonlu Bir Dizinin Sonsuz Bir Dizi ile Konvolüsyonu

$h(m)$ ve $u(m)$ dizilerinden biri sonsuz uzunlukta ise, konvolüsyon işlemi önceki bölümde tartışılan yöntem ile gerçekleştirilemez. Bu durum için aşağıdaki metodlar kullanılır.

$h(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, P-1$ sonlu bir dizi ve $u(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots\infty$ sonsuz uzunlukta bir dizi olsun. Şekil 12.8'de gösterildiği gibi, $u(m)$ dizisini Q uzunluğunda olan $u_k(m)$ alt dizilerine ayıralım.

$$u_k(m) = \begin{cases} u(m), & kQ \leqslant m \leqslant (k+1)Q - 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \tag{12.16}$$

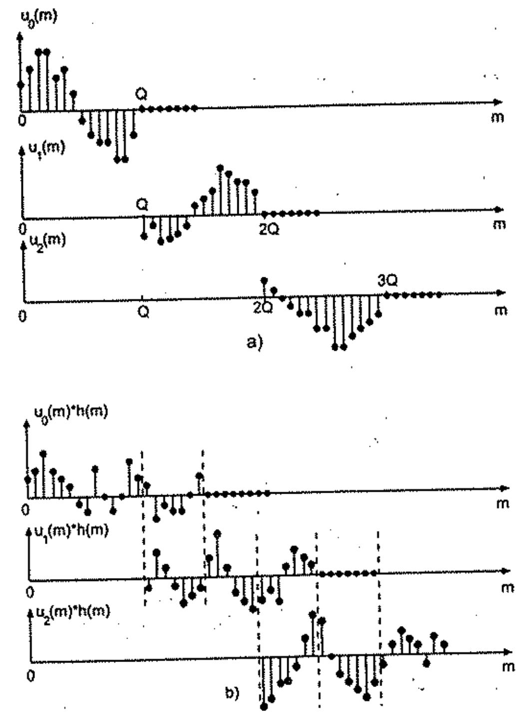
Buna göre, $u_0(m)$ 0'dan $(Q-1)$'e kadar örnekleri, $u_1(m)$ dizisi ise Q'dan $(2Q-1)$'e kadar örnekleri içermektedir. O halde, $u(m)$ dizisi $u_k(m)$'lerin toplamına eşittir. Şekil 12.8'de bu ayrıştırma görülmektedir.

$$u(m) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(m) \tag{12.17}$$

Konvolüsyon doğrusal bir işlem olduğu için, $h(m)$ ile $u(m)$'nin konvolüsyonu, $h(m)$ ve $u_k(m)$, $k = 1, 2, \ldots$ dizilerinin konvolüsyonları toplamına eşittir.

$$u(m) * h(m) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(m) * h(m) \tag{12.18}$$

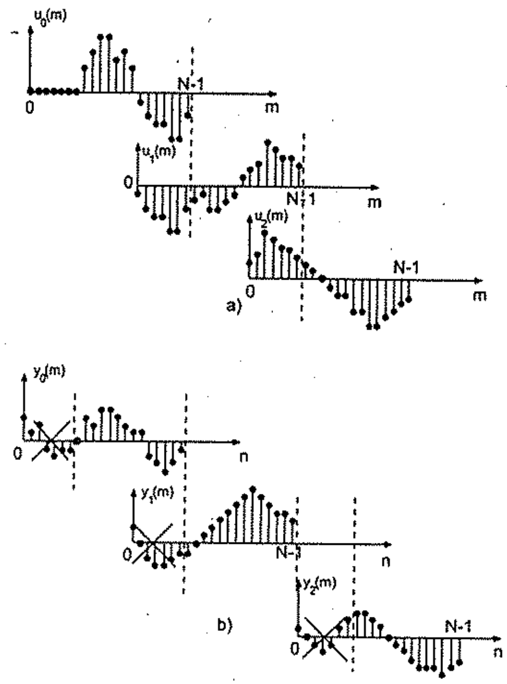
$u_k(m)$'nin sıfır olmayan Q-tane noktası ve $h(m)$'nin uzunluğu P olduğu için, (12.18) toplamındaki $u_k(m) * h(m)$ terimlerinin herbirinin uzunluğu $P+Q-1$ dir.



Şekil 12.9 Çakıştır-ekle yöntemi; a) Sonsuz uzunluktaki $u(m)$ dizisinin birbiriyle çakışmayan Q-uzunluğunda bölümlere ayrılması, b) Her bir bölümün $h(m)$ ile konvolüsyonu.

O halde, $u_k(m) * h(m)$ doğrusal konvolüsyonu $(P+Q-1)$ noktalı AFD kullanılarak hesaplanabilir. $u_k(m)$ giriş işareti bölümlerinin başlangıcı komşularından Q nokta uzaklıkta olduğundan, süzgeçlenen kesimde $(P-1)$ nokta çakışacaktır. Bu durum Şekil 12.9'da gösterilmiştir. Sayısal süzgeç çıkışının bu şekilde süzgeçlenmiş bölümlernden oluşturulma işlemine çakıştır-ekle yöntemi (overlap-add method) adı verilir [1,2].

Bir diğer alternatif yöntemde çakıştır-sakla yöntemidir (overlap - save method). Bu metodun esası $h(m)$ ile $u_k(m)$'nin dairesel konvolüsyonunu gerçekleştirip, bulunan dairesel konvolüsyonun doğrusal konvolüsyona karşı düşen bölümünü belirlemeye dayanmaktadır. P-noktalı impuls cevabı ile N-noktalı bölümün dairesel konvolüsyonu ele alınır ise, ilk $P-1$ noktanın yanlış, diğer



Şekil 12.10 Çakıştır-sakla yöntemi; a) $u(m)$ dizisinin birbiriyle çakışan N-uzunluğunda bölümlere ayrılması, b) Her bir bölümün $h(m)$ ile dairesel konvolüsyonu. Doğrusal konvolüsyonu oluşturmak için atılacak noktalar her bir bölümde gösterilmiştir.

noktaların ise doğrusal konvolüsyondan elde edilen sonuçların aynı olduğu görülecektir. Bu nedenle, Şekil 12.10(a)'da görüldüğü üzere $x(n)$ işareti $P-1$ noktası çakışacak biçimde uzunluğu N olan bölümlere ayrılır. $u_k(m)$ bölümleri,

$$u_k(m) = u(m + k(N - P + 1)) \quad 0 \leqslant m \leqslant N - 1 \tag{12.19}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımlamada, herbir bölüm için zamanın başlangıcı $u(m)$'nin orijininde olmayıp ilgili bölümün başındadır. Her bir bölümün $h(m)$ ile dairesel konvolüsyonu $y'_k(n)$ ile gösterilmektedir. Bu diziler Şekil 12.10(b)'de gösterilmiştir. Çıkış bölümlerinin $0 \leqslant n \leqslant P-2$ arasında kalan $P-1$ noktası atılmalıdır. Böylece, geriye kalan noktalardan elde edilecek $y_k(n)$ bölümleri

herbiri ardına dizilerek süzgeç çıkışı bulunur. Burada,

$$y_k(n) = \begin{cases} y'_k(n) & P-1 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0 & 0 \leqslant n \leqslant P-2 \end{cases} \tag{12.20}$$

yazılarak çıkış işareti,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n - 1(N + P - 1) \tag{12.21}$$

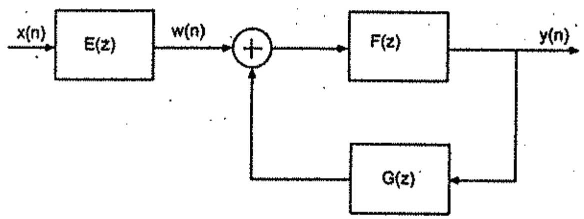
olarak elde edilir. Bu yöntemde, herbir giriş işareti $N-P+1$ yeni nokta ile birlikte önceki bölümden saklanarak gelen $P-1$ eski noktadan oluşur. Bundan dolayı, çakıştır-sakla yöntemi olarak adlandırılmaktadır.

12.3 SAYISAL SÜZGEÇ YAPILARI VE ÖZELLİKLERİ

Sayısal süzgeçlerin özel amaçlı bir donanım kullanılarak gerçekleştirilmesinde devre elemanları ve onların bağlantılarını transfer fonksiyonunu belirler. Uygun süzgeç yapısının seçilmesi işlem miktarında önemli kazançlar sağlayabilir. Ayrıca, Bölüm 13'te tartışılacağı üzere, sınırlı kelime uzunluğunun süzgeç performansı üzerine etkisi devre tipinin seçimine bağlıdır. Gerçekleştirme aşağıdaki yöntemler kullanılarak yapılabilir:

1. Doğrudan
2. Kanonik
3. Seri
4. Paralel
5. Kafes (Lattice)
6. Dalga
7. Basamaklı

Bu bölümde, bu yöntemlerden ilk beşi incelenecektir. Kitabın amacı dışında kalan dalga sayısal süzgeçler ve basamaklı yapılar için literatürde çeşitli kaynaklar vardır [3-7]. Yukarıdaki yöntemlerin sentez ve analizleri doğrusal işaret akış diyagramlarının temel özelliklerine dayanmaktadır.



Şekil 12.11 Geri beslemeli ayrık-zamanlı devre yapısı.

Paralel Sistemler

İmpuls cevapları $h_1(n)$ ve $h_2(n)$ olan iki süzgeç veya süzgeç elemanı paralel bağlanır ise, Şekil 2.3'te gösterildiği gibi eşdeğer süzgecin impuls cevabı $h(n)$'nin $h_1(n)+h_2(n)$ olduğu görülmektedir. O halde, paralel sistemlerin transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \tag{12.22}$$

Seri sistemler

İki süzgeç veya süzgeç elemanı seri bağlanır ise, Şekil 2.4'te gösterildiği gibi eşdeğer süzgecin impuls cevabı $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$ olmaktadır. Buradan, seri bağlı sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \tag{12.23}$$

Geri-Beslemeli Sistemler

Transfer fonksiyonları $E(z)$, $F(z)$, ve $G(z)$ olan üç süzgeç elemanı, Şekil 12.11'de görüldüğü gibi geri beslemeli olarak bağlanır ise, tüm sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$H(z) = \frac{E(z)F(z)}{1 - F(z)G(z)} \tag{12.24}$$

Örnek 12.3 Şekil 2.7'de gösterilen sayısal süzgeç, paralel ve seri sistem özelliklerini kullanarak Şekil 12.11'deki biçimde gerçeklenebilir.

$$\begin{aligned} E(z) &= \sum_{n=0}^{M} a(n)z^{-n} \\ F(z) &= 1 \\ G(z) &= -\sum_{n=1}^{N} b(n)z^{-n} \end{aligned} \tag{12.25}$$

Bu değerler (12.24)'de yerine konulursa süzgecin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{\sum_{n=1}^{M} a(n)z^{-n}}{1 + \sum_{n=0}^{N} b(n)z^{-n}} \tag{12.26}$$

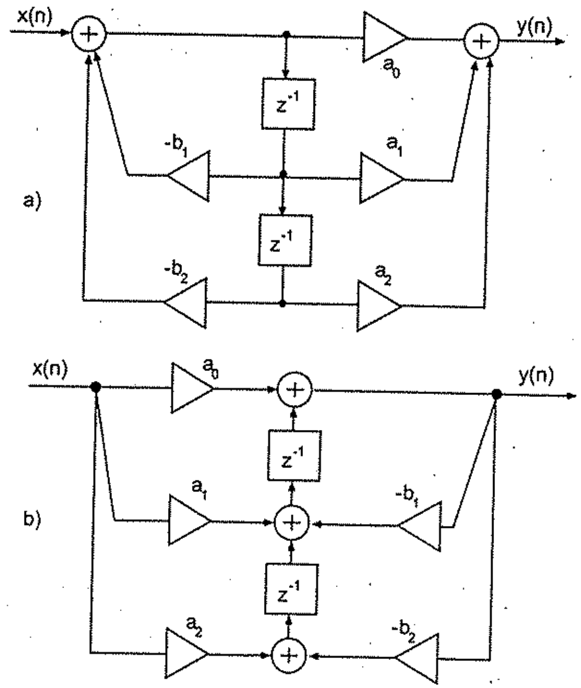
olarak bulunur. Gerçekten, bu sonuç (4.8)'dekinin aynıdır.

Açıklama 12.1 Şekil 2.11'de durum değişkenleri yardımıyla gösterilen süzgeç yapısını (12.24)'ün bir genelleştirilmesi olarak düşünmek mümkündür. (4.15)' deki transfer fonksiyonu, vektör ve matrislerin boyutlarına dikkat ederek (12.24)' deki biçimde yorumlanabilir [6,7].

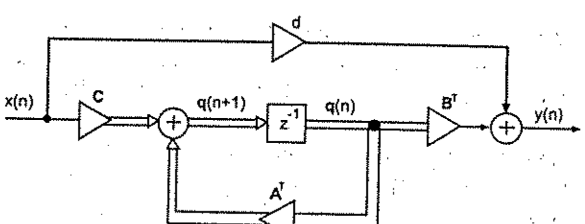
Evrik Sistemler

Ayrık-zamanlı bir sistemde tüm dalların yönleri ters çevrilir ise, elde edilen evrik (transpoze) sistemin transfer fonksiyonu orijinal devrenin aynıdır. Evrik devrenin giriş ve çıkışı sırasıyla, orijinal devrenin çıkış ve girişine karşı düşmektedir. Orijinal devredeki tüm dal düğümleri, evrik devrede toplama düğümlerine dönüşmektedir. Aynı şekilde, toplama düğümleri de dal düğümü olmaktadır. Bu durum Şekil 12.12'de ikinci dereceden bir örnek üzerinde gösterilmektedir. Evrik sistemin transfer fonksiyonu $H^T(z)$'nin orijinal transfer fonksiyonu $H(z)$'ye eşitliği çeşitli yöntemlerle kanıtlanabilir. Burada durum değişkenleri gösterilimi kullanılacaktır. Şekil 2.11'de durum-değişkenleri biçimindeki devrenin evriği Şekil 12.13'te görülmektedir. Bu yeni gösterilimde, $\mathbf{C}$'nin $\mathbf{B}^T$ ile, $\mathbf{B}$'nin $\mathbf{C}$ ile yer değiştirdiğine dikkat edilmelidir. $\mathbf{A}$ matrisi de $\mathbf{A}^T$ olmaktadır. O halde evrik devrenin transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} H^T(z) &= d + z^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{C} \\ &= d + \mathbf{B}^T(\mathbf{I}z - \mathbf{A}^T)^{-1}\,\mathbf{C} \end{aligned} \tag{12.27}$$



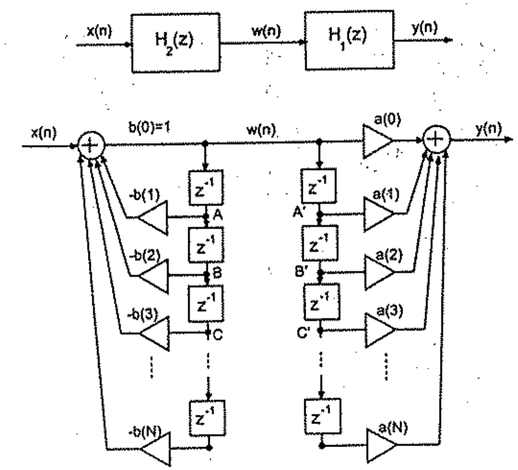
Şekil 12.12 a) İkinci derece sayısal süzgeç; b) Bu süzgecin evriği.



Şekil 12.13 Şekil 2.11 de durum-değişkenleri yöntemi ile modellenen devrenin evriği.

olur. Ancak, bu sonuç 1×1 boyutundaki $H(z)$ matrisinin evriğidir. Bu nedenle aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$H(z) = H^T(z)$$



Şekil 12.14 Kanonik gerçekleştirmenin elde edilmesi için devre yapısının düzenlenmesi.

12.3.1 Doğrudan ve Kanonik Gerçekleştirme

Şekil 12.7'de gösterilen yapı, (2.34)'deki temel fark-denkleminin doğrudan gerçekleştirilmesidir. Bu nedenle, sayısal süzgecin direkt formu olarak adlandırılır. Ancak bu yöntem kullanılan gecikme elemanı sayısı açısından en etkini değildir. Şekil 2.7'deki iki süzgeç bölümü yer değiştirilerek gecikme elemanı sayı azaltılabilir. Süzgeç bölümleri,

$$H_1(z) = N(z) = \sum_{n=0}^{M} a(n)z^{-n} \tag{12.28}$$

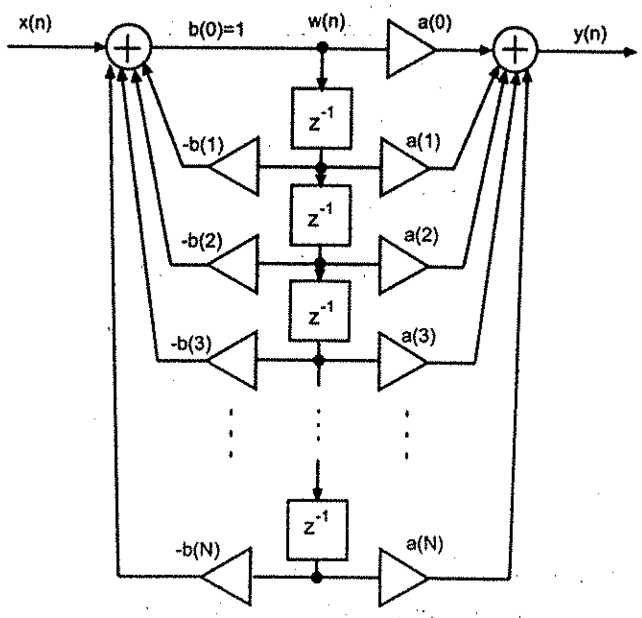
ve $b(0) = 1$ alınarak

$$H_2(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} b(n)z^{-n}} \tag{12.29}$$

tanımlanırsa, Şekil 2.7'deki sistemin transfer fonksiyonu önce $H_1(z)$ ve sonra $H_2(z)$ gerçekleştirilmek üzere,

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \tag{12.30}$$

yazılabilir. Süzgeç bölümlerinin gerçekleştirme sırası değiştirilirse gereksiz olan $\min(N, M)$ gecikme elemanını devre yapısından çıkarmak mümkündür. Şekil 12.14'te $M = N$ için kanonik gerçekleştirmenin elde edilmesi gösterilmektedir.



Şekil 12.15 $H(z)$'nin kanonik gerçekleştirmesi. Direk form II yapısı.

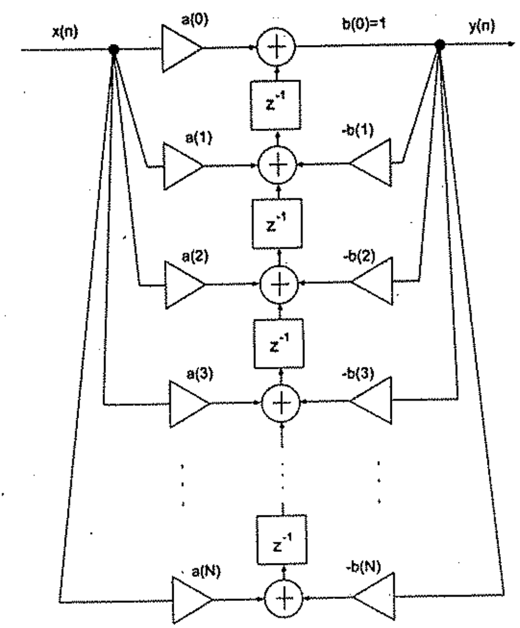
A, B,... noktalarındaki işaretler sırasıyla A', B',... noktalarındaki işaretlere eşittir. O halde, A', B',... yolundaki N adet gecikme elemanı kaldırarak Şekil 12.15'teki kanonik yapı elde edilir. Bazı kaynaklarda, Şekil 12.15'teki kanonik gerçekleştirme direkt form II olarak da adlandırılır [6].

Şekil 12.16'da direkt form II'nin evriği görülmektedir. Bu yeni kanonik yapı direkt form I olarak adlandırılır. Direkt form I'de $H_1(z)$ ve $H_2(z)$ nin yerleri tekrar değiştiği için, Şekil 2.7'de gösterilen orijinal doğrudan gerçekleştirmeye çok benzemektedir.

Verilen bir transfer fonksiyonu minimum sayıda gecikme elemanı, toplama ve çarpma elemanı kullanılarak direkt form I ve II yapılarında gerçekleştirilebilir. $M = N$ için gerekli devre elemanı sayısı şöyledir.

Gecikme elemanı sayısı $= N$
Toplama elemanı sayısı $= N$
Çarpma elemanı sayısı $= 2N - 1$

İki girişin toplanması bir toplama elemanına karşı düşmektedir. Buna göre, K girişli bir toplama düğümünün gerçekleştirilmesi K-1 toplama elemanı ile sağlanmaktadır.



Şekil 12.16 Şekil 12.15'teki devrenin evriği. Direk form I yapısı.

12.3.2 Seri ve Paralel Gerçekleştirme

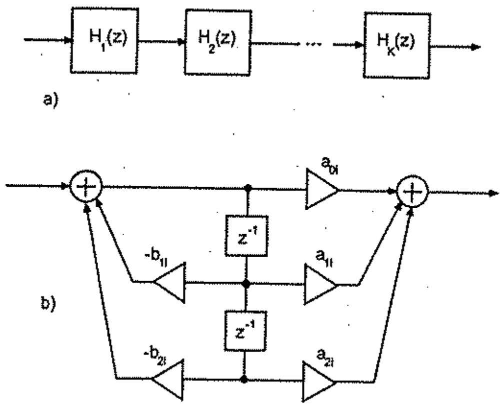
(12.28)'deki pay polinomu $N(z)$ ve (12.29)'daki payda polinomu $D(z)$, ikinci-dereceden çarpanlarına ayrılarak transfer fonksiyonu

$$H(z) = \prod_{i=1}^{K} H_i(z) \tag{12.31}$$

$$H_i(z) = \frac{N_i(z)}{D_i(z)} = \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \tag{12.32}$$

biçiminde yazılabilir. Bu yöntemde, $H(z)$ transfer fonksiyonu Şekil 12.17 (a)'daki gibi gerçekleştirilir. Seri bağlı bölümlerin blok-diyagramı Şekil 12.17(b)'de gösterilmektedir.

$H(z)$'nin kesirlere açılımı ile paralel biçimde gerçekleştirme elde edilir. Bu açılım, süzgeç bölümlerinin katsayılarının gerçel sayılar olması için karmaşık-eşlenik ikinci dereceden terimleri birleştirecek biçimde yapılmaktadır. Sistem



Şekil 12.17 a) $H(z)$'nin seri gerçekleştirilmesi, b) kanonik ikinci-derece bölüm.

fonksiyonu

$$H(z) = \sum_{i=1}^{K} H_i(z) \tag{12.33}$$

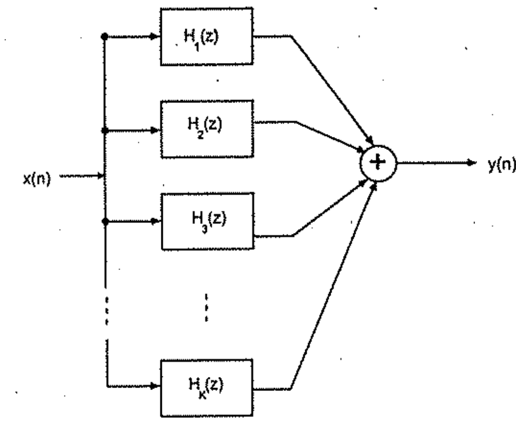
$$H_i(z) = \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \tag{12.34}$$

biçiminde yazılabilir. Şekil 12.18'de paralel açılıma ilişkin devre yapısı gösterilmektedir.

Açıklama 12.2 Paralel ve seri gerçekleştirmede süzgeç bölümlerinin ikinci-dereceden olması kararlılık açısından önemlidir. İkinci-dereceden süzgeçlerin kararlığını Şekil 4.3'teki kararlılık üçgeni yardımı ile belirlemek mümkündür.

12.3.3 Kafes Süzgeç Yapıları

Sayısal süzgeçlerin gerçekleştirilmesinde diğer bir yöntem kafes (lattice) yapılardır. Kafes yapılı süzgeçler yada diğer bir deyişle kafes süzgeçler belirli özelliklerinden dolayı, başta sayısal ses işleme ve uyarlamalı süzgeçler olmak üzere, pek çok alanda uygulama bulmuşlardır. Bu özellikler içinde, modülerlik, katsayı kuvantalama etkilerine karşı dayanıklılık ve IIR süzgeçler için diğer yapılarda bulunmayan basit bir kararlılık testinin mevcut olması sayılabilir.



Şekil 12.18 $H(z)$'nin paralel gerçekleştirilmesi.

FIR Kafes süzgeçler

FIR kafes süzgeci oluşturan temel yapı Şekil 12.19(a)'da gösterilen kafes hücresidir. İki giriş ve iki çıkış işareti olan bu basit hücre tek bir katsayı (K_m) ile tanımlanmaktadır. K_m yansıma katsayısı olarak adlandırılır. Hücrenin iki giriş işareti $f_{m-1}(n)$ ve $b_{m-1}(n)$ ile iki çıkış işareti $f_m(n)$ ve $b_m(n)$ arasındaki ilişki aşağıda verilen fark denklemleri ile belirtilmektedir.

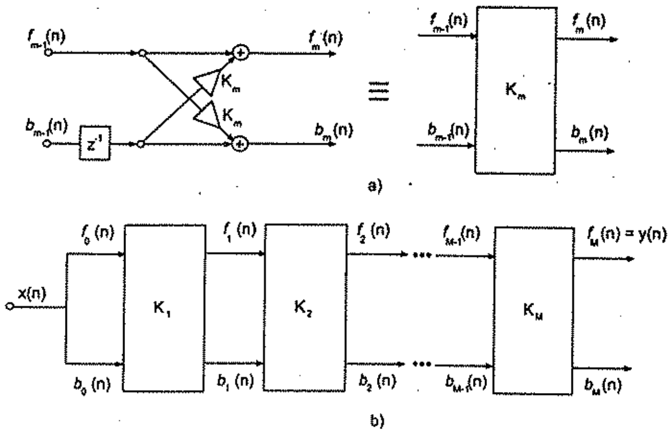
$$\begin{aligned} f_m(n) &= f_{m-1}(n) + K_m b_{m-1}(n-1) \\ b_m(n) &= b_{m-1}(n-1) + K_m f_{m-1}(n) \end{aligned} \tag{12.35}$$

Bu kafes hücrelerinden K_m, $m = 1, \ldots, M$ yansıma katsayılarına sahip M tanesini ardışıl olarak arka arkaya bağlayarak, M. dereceden bir FIR süzgeci gerçeklemek mümkün olacaktır. Bu yapı Şekil 12.19(b)'de görülmektedir. FIR süzgecin giriş işareti $x(n)$, çıkış işareti $y(n)$ olarak alınmaktadır. İlk hücreye uygulanan giriş işaretleri $f_0(n) = x(n)$ ve $b_0(n) = x(n)$ olarak tanımlanmaktadır. Daha sonra gelen hücrelerde her hücrenin giriş işaretleri bir önceki hücrenin çıkış işaretleri olmaktadır. En son hücrede ise süzgecin çıkışı $y(n) = f_M(n)$ olarak belirtilmektedir.

Giriş işareti $x(n)$ ve herhangi bir ara çıkış işareti $f_m(n)$ arasındaki transfer fonksiyonunu $H_{f,m}(z)$ olarak tanımlayalım. Böylece,

$$F_m(z) = H_{f,m}(z)X(z), \quad m = 1, \ldots, M \tag{12.36}$$

olur. Öte yandan, giriş işareti $x(n)$ ve herhangi bir ara çıkış işareti $b_m(n)$ arasındaki transfer fonksiyonunu da $H_{b,m}(z)$ olarak tanımlayalım. Böylece



Şekil 12.19 a) FIR kafes hücresi; b) M. derece FIR kafes süzgeç yapısı

(12.36)'ya benzer şekilde

$$B_m(z) = H_{b,m}(z)X(z), \quad m = 1, \ldots, M \tag{12.37}$$

olur. (12.35) kullanılarak $H_{f,m}(z)$ ve $H_{b,m}(z)$ transfer fonksiyonları için aşağıda verilen bağıntı bulunabilir.

$$H_{f,m}(z) = H_{f,m-1}(z) + K_m z^{-1} H_{b,m-1}(z) \tag{12.38}$$

$$H_{b,m}(z) = z^{-1} H_{b,m-1}(z) + K_m H_{f,m-1}(z) \tag{12.39}$$

Bu iki transfer fonksiyonu arasında aşağıda verilen bağıntı vardır.

$$H_{b,m}(z) = z^{-m} H_{f,m}(z^{-1}), \quad m = 1, \ldots, M \tag{12.40}$$

(12.40) eşitliğini kullanarak (12.38) yeniden yazılabilir:

$$H_{f,m}(z) = H_{f,m-1}(z) + K_m z^{-m} H_{f,m-1}(z^{-1}), \quad m = 1, 2, \ldots, M \tag{12.41}$$

Bu özyineli gösterilim $H_{f,0}(z) = 1$ ile başlamaktadır. K_m, $m = 1, \ldots, M$ yansıma katsayıları verildiğinde $H_{f,0}(z) = 1$'den başlayarak m'in yukarı doğru değerlerine doğru tüm $H_{f,m}(z)$ transfer fonksiyonları sırasıyla hesaplanabilir. (12.41) denklemine *yukarı-adım özyinelemesi* adı verilir.

$H_{f,m}(z)$ transfer fonksiyonunun açık yazılımı şu şekildedir.

$$H_{f,m}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{m} a_m(k) z^{-k} \tag{12.42}$$

$a_m(k)$, $H_{f,m}(z)$ fonksiyonunun katsayılarını göstermektedir. Yukarı-adım özyinelemesi (12.41) kullanılarak bu katsayılar için özyineli gösterilim bulunabilir:

$$\begin{aligned} a_m(k) &= a_{m-1}(k) + K_m a_{m-1}(m-k), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ a_m(m) &= K_m \end{aligned} \tag{12.43}$$

(12.43)'de verilen formül ile, FIR bir kafes süzgeç için yansıma katsayıları K_m, $m = 1, \ldots, M$ verildiğinde süzgeç transfer fonksiyonu $H(z) = H_{f,M}(z)$ hesaplanabilmektedir .

Örnek 12.4 $K_1 = 0.3$, $K_2 = 0.4$ ve $K_3 = 0.5$ olarak verilen yansıma katsayılarına sahip olan $H(z)$ transfer fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm. (12.43) ve verilen yansıma katsayıları kullanılarak $H(z) = H_{f,3}(z)$ transfer fonksiyonu bulunabilir.

$$\begin{aligned} a_1(1) &= K_1 \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(1) &= a_1(1) + K_2 a_1(1) \\ &= 0.3 + 0.4 \cdot 0.3 \\ &= 0.42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(2) &= K_2 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3(1) &= a_2(1) + K_3 a_2(2) \\ &= 0.42 + 0.5 \cdot 0.4 \\ &= 0.62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3(2) &= a_2(2) + K_3 a_2(1) \\ &= 0.4 + 0.5 \cdot 0.42 \\ &= 0.61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3(3) &= K_3 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Böylece $H(z) = H_{f,3}(z) = 1 + 0.62z^{-1} + 0.61z^{-2} + 0.5z^{-3}$ olarak bulunur. □

İlgi çekici olan diğer bir soru ise, FIR transfer fonksiyonu $H(z) = H_{f,M}(z)$ verildiğinde karşılık gelen yansıma katsayılarının bulunmasıdır. Bu aranan formül (12.41)'in yeniden yazılmasıyla elde edilir.

$$H_{f,m-1}(z) = \frac{1}{1-K_m^2}\left(H_{f,m}(z) - K_m z^{-m} H_{f,m}(z^{-1})\right), \quad m = M, M-1, \ldots, 2 \tag{12.44}$$

Bu özyineli gösterilim *aşağı-adım özyinelemesi* olarak adlandırılır. Transfer fonksiyonu katsayıları $a_m(k)$ cinsinden aşağı-adım özyinelemesi şu şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned} a_{m-1}(k) &= \frac{1}{1-K_m^2}\left(a_m(k) - K_m a_m(m-k)\right), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ K_{m-1} &= a_{m-1}(m-1) \end{aligned} \tag{12.45}$$

(12.45)'de verilen aşağı-adım özyinelemesi kullanılarak, M. dereceden FIR transfer fonksiyonu $H(z) = H_{f,M}(z)$'yi gerçekleyecek kafes yansıma katsayıları (K_m) bulunabilmektedir.

Örnek 12.5 $H(z) = H_{f,3}(z) = 1 + 0.62z^{-1} + 0.61z^{-2} + 0.50z^{-3}$ transfer fonksiyonuna sahip FIR süzgeç için kafes yansıma katsayılarını bulunuz.

Çözüm. (12.45) ve verilen direkt form katsayıları kullanılarak yansıma katsayıları bulunabilir. Başlangıç olarak

$$a_3(1) = 0.62 \quad a_3(2) = 0.61 \quad a_3(3) = 0.50 \quad K_3 = a_3(3) = 0.50$$

Aşağı-adım özyinelemesi kullanılarak

$$\begin{aligned} a_2(1) &= \frac{1}{1-K_3^2}(a_3(1) - K_3 a_3(2)) \\ &= \frac{1}{1-0.5^2}(0.62 - 0.5 \cdot 0.61) \\ &= 0.42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(2) &= \frac{1}{1-K_3^2}(a_3(2) - K_3 a_3(1)) \\ &= \frac{1}{1-0.5^2}(0.61 - 0.5 \cdot 0.62) \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

$$K_2 = a_2(2) = 0.4$$

$$\begin{aligned} a_1(1) &= \frac{1}{1-K_2^2}(a_2(1) - K_2 a_2(1)) \\ &= \frac{1}{1-0.4^2}(0.42 - 0.4 \cdot 0.42) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

$$K_1 = a_1(1) = 0.3$$

□

FIR kafes süzgecin önemli bir özelliği $H(z) = H_{f,M}(z)$ transfer fonksiyonunun kökleri ile ilgilidir. Bu transfer fonksiyonunun köklerinin hepsinin birim daire içinde yer alması için gerek ve yeter koşul, kafes yansıma katsayılarının her birinin genliğinin birden küçük olmasıdır. Bu koşul şu şekilde yazılabilir.

$$|K_m| < 1 \quad m = 1, 2, \ldots, M \tag{12.46}$$

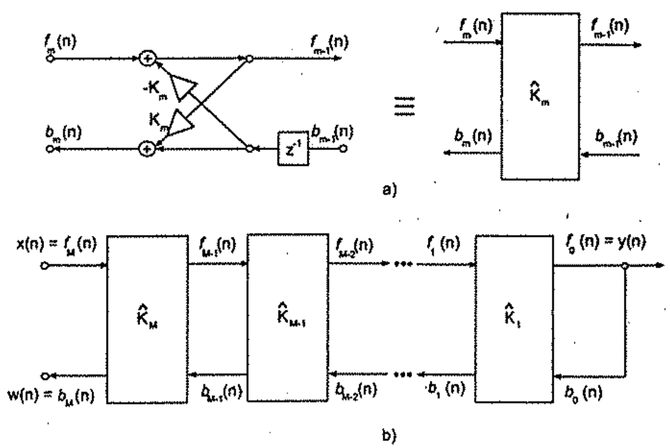
Böylece $H(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$ şeklinde nedensel bir sisteme ait transfer fonksiyonu verildiğinde kararlılığını şu şekilde test edebiliriz. $A(z)$ için aşağı-adım özyinelemeyi uygulayarak kafes yansıma katsayılarını buluruz. Sonra bu katsayıların genliklerini kontrol ederiz. Eğer tüm genlikler birden küçük değilse sistem kararsız olur. Bu yaklaşım sayısal süzgeçler için *Schür-Cohn* kararlılık testi olarak adlandırılır.

Örnek 12.6

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 + 0.62z^{-1} + 0.61z^{-2} + 0.50z^{-3}}$$

olarak verilen transfer fonksiyonunun kararlılığını test ediniz. (Sistem nedensel kabul edilecektir).

Çözüm. Sistemin kutuplarını $H(z)$'nin kökleri olarak buluruz: $p_1 = 0.0535 + 0.8276j$, $p_2 = 0.0535 - 0.8276j$, $p_3 = -0.7270$. Bu kutupların genlikleri $|p_1| = 0.8293$, $|p_2| = 0.8293$ ve $|p_3| = 0.7270$ olur. Böylece tüm kutuplar birim daire içindedir ve sistem kararlıdır. Sistem kararlılığına kutupları bulmadan, yansıma katsayılarına bakarak Schür-Cohn testi ile de karar verebiliriz. Örnek 12.5'de $H(z)$ için yansıma katsayılarını $K_1 = 0.3$, $K_2 = 0.4$ ve $K_3 = 0.5$ olarak bulmuştuk. Yansıma katsayılarının tümünün genliği birden ufak olduğu için sistem kararlı olacaktır. □



Şekil 12.20 a) IIR kafes hücresi; b) sadece kutupları olan IIR süzgeç için kafes süzgeç yapısı

IIR Kafes süzgeçler

İlk olarak, aşağıda gösterilen şekilde sadece kutupları olan (all-pole) bir IIR süzgeç transfer fonksiyonunu ele alalım.

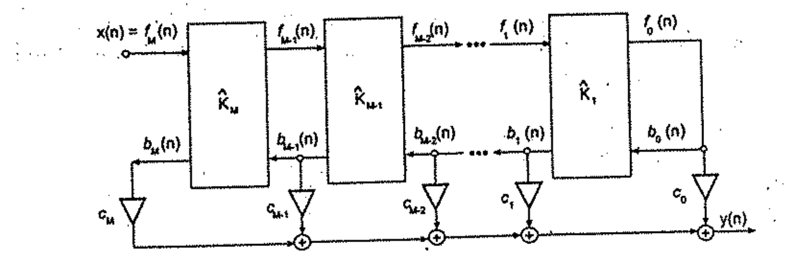
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{H_M(z)} \\ H_M(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{M} a(k) z^{-k} \end{aligned} \tag{12.47}$$

Bu süzgeç için kafes yapısı Şekil 12.20'de gösterilmektedir. Kafes süzgeci oluşturan temel yapı Şekil 12.20(a)'da gösterilen kafes hücresidir. İki giriş ve iki çıkış işareti olan kafes hücre, yansıma katsayısı K_m ile tanımlanmaktadır. Hücrenin iki giriş işareti $f_m(n)$ ve $b_{m-1}(n)$ ile iki çıkış işareti $f_{m-1}(n)$ ve $b_m(n)$ arasındaki ilişki aşağıda verilen fark denklemleri ile belirtilmektedir.

$$\begin{aligned} f_{m-1}(n) &= f_m(n) - K_m b_{m-1}(n-1) \\ b_m(n) &= b_{m-1}(n-1) + K_m f_m(n) \end{aligned} \tag{12.48}$$

Transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{H_M(z)}$$



Şekil 12.21 M tane kutbu ve Q tane sıfırı olan IIR süzgeç için kafes süzgeç yapısı

olarak verildiğine göre, yansıma katsayıları (K_m, $m = 1, \ldots, M$), $H_M(z)$ fonksiyonuna (12.45)'de verilen aşağı-adım özyinelemesi uygulanarak bulunur.

İkinci olarak genel formda verilen ve Q tane sıfırı ve M tane kutbu olan IIR bir transfer fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{B_Q(z)}{H_M(z)} \\ H_M(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{M} a(k) z^{-k} \\ B_Q(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{Q} b(k) z^{-k} \end{aligned} \tag{12.49}$$

$Q \leqslant M$ için $H(z)$'nin kafes yapısı ile gerçekleştirilmesi Şekil 12.21'de gösterildiği üzere olacaktır. Şekil 12.21'de iki bölüm ayırt edilebilmektedir. İlk olarak $1/H_M(z)$ fonksiyonunu gerçekleştiren ve Şekil 12.20(b) ile aynı olan bölüm vardır. Şekil 12.20(b) ile farklılık gösteren kısım ise, $b_m(n)$ noktalarından çıkışlar alarak bunların c_m katsayılarıyla çarpılıp toplanmasıdır. Bu kısım dallı gecikme hattı (tapped delay line) olarak adlandırılır. c_m katsayılarının (12.49)'da verilen direkt form katsayılarından bulunması şu şekilde olur.

$$\begin{aligned} c_Q &= b(Q) \\ c_k &= b(k) - \sum_{i=k+1}^{Q} c_i a(i-k) \quad k = Q-1, Q-2, \ldots, 0 \end{aligned} \tag{12.50}$$

IIR bir süzgeç için kafes yansıma katsayılarını bulduktan sonra, kararlılık (12.46) da verilen test ile kolayca kontrol edilebilir.

Örnek 12.7 Aşağıda verilen MATLAB programı yukarı-doğru özyineleme algoritmasını gerçekleştirmektedir. Böylece verilen K yansıma katsayıları için direkt form katsayıları bulunmaktadır.

```
function [a] = kafes_direkt(K)
% FIR kafes süzgeç gösteriliminden FIR Direkt forma geçiş
% yukarı-adım özyinelemesi
%  K =Kafes yansıma katsayıları
%  a = FIR direkt form katsayıları
M = length(K); J = 1; A = 1;
for m=1:1:M
    A = [A,0]+K(m)*[0,J];
    J = fliplr(A);
end a=A;
```

`K=[0.3 0.4 0.5]` katsayıları için `[a]=kafes_direkt(K)`, bize `a=[1.00 0.62 0.61 0.50]` sonucunu vermektedir. Bu transfer fonksiyonunun köklerini bulursak beklendiği gibi birim daire içinde olduklarını görürüz.

Örnek 12.8 Aşağıda verilen MATLAB programı aşağı-doğru özyineleme algoritmasını gerçekleştirmektedir. Böylece verilen direkt form katsayıları için, K kafes yansıma katsayıları bulunmaktadır.

```
function [K] = direkt_kafes(a)
% FIR Direkt formdan FIR kafes süzgeç gösterilimine geçiş
% aşağı-adım özyinelemesi
%  K =Kafes yansıma katsayıları
%  a = FIR direkt form katsayıları
M = length(a)-1; K = zeros(1,M); a0 = a(1);
if a0 == 0
    error('a(1) sıfıra eşit')
end
K(M) = a(M+1); A = a;
for m=M:-1:2
    J = fliplr(A);
    A = (A-K(m)*J)/(1-K(m)^2);
    A = A(1:m);
    K(m-1) = A(m);
end
```

`a=[1.00 0.62 0.61 0.50]; [K]=direkt_kafes(a);` yazarsak `K=[0.3 0.4 0.5]` sonucunu bulmaktayız.

REFERANSLAR

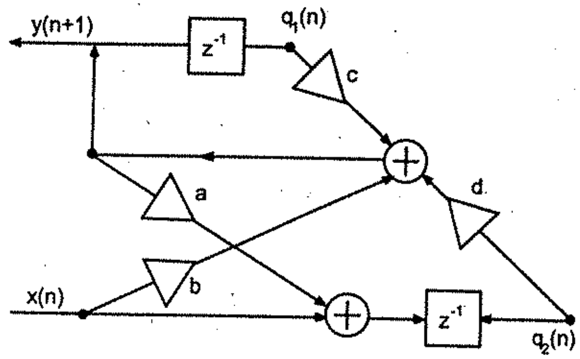
1. C. T. Chen *One-Dimensional Digital Signal Processing*, Marcel Dekker, New York, 1979.
2. A. V. Oppenheim and R. W. Schafer *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
3. A. Fettweis, "Digital Filter Structures Related to Classical Filter Network", *Archiv. Elekt. Übertragung*, vol. 25, February 1977.
4. S. K. Mitra and R. J. Sherwood, "Digital Ladder Network", *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-21, pp. 30-36, February 1973.
5. J. Makhoul, Linear Predicton: A Tutorial Reviev, *Proc. IEEE*, vol. 63, pp. 561-580, April 1975.
6. L.B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
7. A. Antoniou *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1979.
8. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing, A Computer Based Approach*, Mc Graw-Hill, 2001.
9. V. K. Ingle ve John G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB*, Brooks Cole, 1999.

PROBLEMLER

12.1 Aşağıdaki transfer fonksiyonlarını doğrudan ve kanonik metoda göre gerçekleştiriniz.

a) $H(z) = \dfrac{4(z-1)^4}{4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}$

b) $H(z) = \dfrac{(z-1)^2}{4z^3 - 2z^2 + 1}$



Şekil 12.22

12.2 Aşağıdaki transfer fonksiyonlarını seri ve paralel metoda göre gerçekleştiriniz.

a) $H(z) = \dfrac{16(z+1)z^2}{(4z^2-2z+1)(4z+3)}$

b) $H(z) = \dfrac{(z^2+2z+2)(z+0.6)}{(z-0.8)(z+0.8)(z^2+0.1z+0.8)}$

12.3 a) Şekil 12.22'de blok diyagramı gösterilen sayısal süzgeç yapısını aşağıdaki formda durum denklemleri biçiminde ifade etmek için **A**, **B**, **C**, **D** matrislerini belirleyiniz.

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \mathbf{B}x(n)$$

$$y(n+1) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \mathbf{D}x(n)$$

b) Algoritma aşağıdaki formda da gerçeklenebilmektedir:

$$y(n+1) = q_1(n+1) = \alpha q_1(n) + \beta q_2(n) + \gamma x(n)$$

$$q_2(n+1) = \delta q_1(n+1) + \epsilon x(n)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ değerlerini a, b, c, d cinsinden belirleyiniz.

c) $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ transfer fonksiyonunu bulunuz.

MATLAB UYGULAMALARI

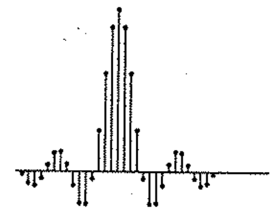
M12.1 Aşağıda verilen MATLAB programı direkt formda verilen ve sıfır ve kutuplara sahip bir IIR transfer fonksiyonu için kafes gösterilimini bulmaktadır. Böylece verilen direkt form katsayıları için K kafes yansıma katsayıları ve c gecikme hattı katsayıları bulunmaktadır. Bu fonksiyonu kullanarak Problem 12.1'de verilen transfer fonksiyonları için kafes süzgeç gerçeklemesini bulunuz. K katsayılarından faydalanarak sistemlerin kararlı olup olmadıklarını belirtiniz.

```
function [K,c] = direkt_iirkafes(b,a)
% IIR kutup-sıfır direkt formdan  kafes süzgeç gösterilimi
%  K =Kafes yansıma katsayıları
%  a = FIR direkt form katsayıları
%  c = gecikme hattı katsayıları
%  b = pay polinomu katsayıları
%  a = payda polinomu katsayıları
a1 = a(1); a = a/a1; b = b/a1;
M = length(b); N = length(a);
if M > N
 error('*** b uzunluğu <= a uzunluğu olmalı ***')
end
b = [b, zeros(1,N-M)]; K = zeros(1,N-1);
A = zeros(N-1,N-1); c = b;
for m = N-1:-1:1
    A(m,1:m) = -a(2:m+1)*c(m+1);
    K(m) = a(m+1);
    J = fliplr(a);
    a = (a-K(m)*J)/(1-K(m)*K(m));
    a = a(1:m);
    c(m) = b(m) + sum(diag(A(m:N-1,1:N-m)));
end
```

M12.2 Aşağıda verilen MATLAB programı sıfır ve kutuplara sahip bir IIR transfer fonksiyonu için kafes gösteriliminen direkt forma geçişi sağlamaktadır. Verilen K kafes yansıma katsayıları ve c gecikme hatti katsayıları için direkt form katsayıları bulunmaktadır. Bu fonksiyonu kullanarak aşağıda verilen kafes katsayıları için direkt form gerçeklemesini bulunuz. K katsayılarından faydalanarak sistemin kararlı olup olmadığını belirtiniz. Sistemin kutuplarını bulunuz ve K katsayılarından bulduğunuz kararlılık sonucuyla karşılaştırınız.

$$K = [-8.00 \ -1.1429 \ 0.30] \quad c = [11.50 \ 1.4143 \ -0.660 \ 0.20]$$

```
function [b,a] = iirkafes_direkt(K,c)
% IIR kutup-sıfır direkt formdan kafes süzgeç gösterilimi
% K =Kafes yansıma katsayıları
% a = FIR direkt form katsayıları
% c = gecikme hattı katsayıları
% b = pay polinomu katsayıları
% a = payda polinomu katsayıları
N = length(K); M = length(c);
c = [c, zeros(1,N-M+1)];
J = 1; a = 1; A = zeros(N,N);
for m=1:1:N
     a = [a,0]+conv([0,K(m)],J);
     A(m,1:m) = -a(2:m+1);
     J = fliplr(a);
end
b(N+1) = c(N+1);
for m = N:-1:1
     A(m,1:m) = A(m,1:m)*c(m+1);
     b(m) = c(m) - sum(diag(A(m:N,1:N-m+1)));
end
```



Bölüm 13

SAYISAL SÜZGEÇLERDE SINIRLI KELİME UZUNLUĞUNUN ETKİLERİ

13.1 GİRİŞ

Sayısal süzgeçlerin gerçekleştirilmesinde sayılar sınırlı-uzunluktaki kayıt elemanlarında saklanırlar. Bu nedenle, katsayılar ve işaret değerleri yuvarlatma (rounding) veya kesme (truncation) yoluyla kuvantalanır. Bu kuvantalama işleminden sonra, ancak bellek elemanlarında saklanabilirler. Sayıların kuvantalanması üç tür hata ortaya çıkarır:

1. Katsayı kuvantalama hataları
2. İşlem kuvantalama hataları
3. Giriş kuvantalama hataları

Herhangi bir metoda göre bulunan transfer fonksiyonu $H(z)$'nin katsayıları yüksek bir doğruluk derecesinde bulunur. Eğer bulunan katsayılar kuvantalanacak olunursa süzgecin frekans cevabı değişir ve istenilen özellikleri karşılamayabilir. Ayrıca, kararlı bir sayısal süzgeç kararsız duruma da girebilir.

İşlem kuvantalama hataları da çarpım sonuçlarının kuvantalanmasıyla ortaya çıkmaktadır. Örneğin b_1 bitlik bir işaret b_2 bitle gösterilen bir katsayı ile çarpıldığında çarpım sonucu $b_1 + b_2$ bitlik uzunlukta gösterilim gerektirebilir. Pratikte her adımda aynı uzunlukta kayıt ediciler kullanıldığından, herbir çarpım sonucu yuvarlatma veya kesme işleminden sonra kayıt edicide saklanır.

Sayısal süzgeçler sürekli-zamanlı işaretlerin işlenmesinde kullanıldığında giriş kuvantalama hataları ortaya çıkar. Analog-sayısal dönüştürücülerde yapısal olarak bu hatalar vardır.

13.2 SAYILARIN GÖSTERİLİMİ

Sayısal sistem gerçekleştirmede ikili (binary) sayı sistemi kullanılır. En genel durumda, bir N sayısı şöyle gösterilir:

$$N = \sum_{i=-m}^{n} b_i r^i \quad 0 \leqslant b \leqslant r-1 \tag{13.1}$$

r parametresine gösterilimin tabanı (radix) denilir. İkili sistemde $r = 2$'dir. Onlu sistemde ise $r = 10$'dur. b_i değerleri bir araya toplanarak N sayısı,

$$N = (b_n\, b_{n-1} \ldots b_0\, b_{-1}\, b_{-2} \ldots b_{-m}) \tag{13.2}$$

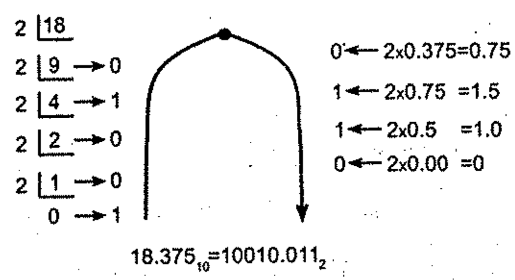
biçiminde gösterilebilir. N sayısını ikiye ayıran noktaya "radix" noktası denir.

İkili gösterilimde b_i'ler 0 veya 1 değerini alırlar. (13.1) ifadesi yardımı ile herhangi bir tabandan ondalık sisteme geçiş hesaplanabilir . İkili gösterilimdeki "0" ve "1" ler "bit" olarak adlandırılır.

Herhangi bir ondalık sayı ikili sayıya çevrilirken şu yola başvurulur: (1) Tam sayı kısmı tekrarlanarak 2'ye bölünür. (2) Kesirli kısmı 2 ile çarpıp ve çıkan tam kısmın dışında kalan kesirli bölümle işleme gerektiği kadar devam edilir. Elde edilen tam sayılar elde edildiği sırada düzenlenir.

Bu uygulamayı aşağıdaki örnekte inceleyelim:

Örnek 13.1 $N = 18.375_{10}$ sayısının ikili gösterilimini bulalım.

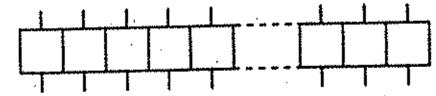


Örnek 13.2 11.101_2 sayısına karşı düşen ondalık sayıyı (13.1) ifadesini kullanarak bulalım.

$$\begin{aligned} 11.101_2 &= 1(2^1) + 1(2^0) + 1(2^{-1}) + 0(2^{-2}) + 1(2^{-3}) \\ &= 3.625_{10} \end{aligned}$$

İkili sayıların donanım içinde depolanması "yazboz" (flip-flop) lar yardımıyla mümkün olur. Bilindiği üzere, bir yazboz (flip-flop) ya yüksek yada alçak

durumdadır. Alçak durumda 0, yüksek konuma da 1 karşı düşürülerek tek bitlik bir bilginin bir yazboz devresinde saklanması mümkündür. Ancak, n-adet yazboz Şekil 13.1'deki gibi düzenlenirse n bitlik bir ikili sayı yazbozlar yardımıyla gösterilebilir.



Şekil 13.1 n-bitlik ikili sayının saklanmasında kullanılan kaydedici.

Şekil 13.2'de gösterilen süzgecin 4-bit olarak gerçekleştirilmesinde bu yöntem kullanılabilir. R_b kaydedicisi (register) b katsayısını, ve R_y kaydedicisi $y(n-1)$ geçmiş çıkış değerini saklamak amacıyla kullanılmıştır. Çarpıcının çıkışı $b \cdot y(n-1)$'dir Yeni bir giriş geldiğinde, toplayıcı harekete geçer ve yeni çıkış $y(n)$ bulunur. Bu çıkış R_y kaydedicisindeki değeri yeniler. Yeni bulunan $y(n)$ değeri $y(n-1)$'in yerine geçer. Bunun sonucunda, çarpıcı tetiklenerek $by(n-1)$ elde edilir. Her yeni giriş geldiğinde bu işlem devam eder.

Bu gerçekleştirmede kullanılan aritmetik sabit-noktalı (fixed-point) veya kayan-noktalı (floating-point) olabilir. Her iki yöntemde negatif sayıların gösterilimine bağlı olarak çeşitli metodlar kullanılmaktadır. "Sabit-noktalı" aritmetikte radix noktası kaydedicide belirli bir fiziksel konumu göstermektedir. Halbuki, "kayan-noktalı" aritmetikte gerçek radix noktası için fiziksel bir pozisyon yoktur veya ayrılmamıştır.

13.2.1 Sabit Noktalı Aritmetik

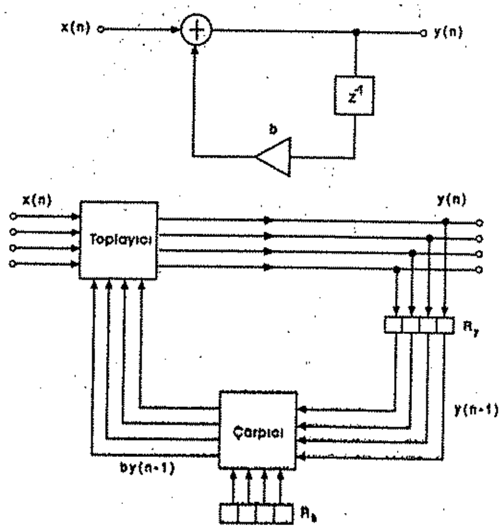
Bu tür aritmetikte tüm sayılar kesirlidir. İlk bit işaret için ayrılır. Radix noktası birinci ve ikinci bit arasındadır. Şekil 13.3'te sabit noktalı bir sayının saklanması görülmektedir. Negatif sayıların gösterilimine bağlı olarak, "sabit noktalı" aritmetik üç farklı biçimde olabilmektedir [1,5].

1. Sabit Noktalı Aritmetik
2. 1'in komplementi
3. 2'nin komplementi

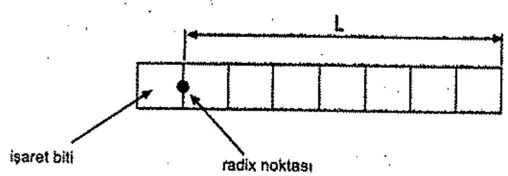
İşaretli genlik

Burada kesirli bir sayı

$$N = \mp 0.b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-m} \tag{13.3}$$



Şekil 13.2 Verilen bir sayısal süzgecin gerçekleştirilmesi.



Şekil 13.3 Sabit-noktalı sayının gösterilimi. L kelime uzunluğu.

şöyle gösterilebilir.

$$N_{ig} = \begin{cases} 0.b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-m}, & N \geqslant 0 \text{ için} \\ 1.b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-m}, & N \leqslant 0 \text{ için} \end{cases} \tag{13.4}$$

Bu gösterilimde en önemli bit işaret bitidir. Aşağıda bu yönteme ilişkin örnekler görülmektedir.

$$\begin{aligned} N &= +0.1101 \rightarrow N_{ig} = 0.1101 \\ N &= -0.1001 \rightarrow N_{ig} = 1.1001 \end{aligned} \tag{13.5}$$

1'in Komplementi

N sayısı şöyle gösterilir,

$$N_1 = \begin{cases} N, & N \geqslant 0 \text{ için} \\ 2 - 2^{-L} - |N|, & N \leqslant 0 \text{ için} \end{cases} \tag{13.6}$$

L kelime uzunluğudur. (radix noktasının sağındaki bit sayısı). $(2 - 2^{-L})$'nin ikili formu $(L+1)$ noktanın 1'ler ile doldurulmuş şeklidir. O halde, negatif bir sayının 1'in komplementinde (L+1) bitle gösterilimi verilmektedir. Burada, 0'lar 1'lere, 1'ler de 0'lara dönüştürülmektedir.

Örnek 13.3 $N = -0.1101$ sayısı için 1'in komplementi gösterilimini elde ediniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} N = 0.11010 &\Rightarrow N_1 = 1.00101, L = 5 \text{ için} \\ &\Rightarrow N_1 = 1.00101111, L = 8 \text{ için} \end{aligned} \tag{13.7}$$

Gerçekten (13.6)'dan,

$$\begin{array}{r} L = 8 \\ \longleftarrow\ \longrightarrow \\ 2 \Rightarrow 10.000000000 \\ -2^{-8} \Rightarrow -0.000000001 \\ \hline (2 - 2^{-8}) \Rightarrow 1.11111111 \\ |-0.11010| \Rightarrow -0.11010000 \\ \longleftrightarrow \\ \text{ilave sıfırlar} \\ \hline \\ (2 - 2^{-8}) - |N| \Rightarrow N_1 = 1.00101111 \end{array} \tag{13.8}$$

elde edilir. □

2'nin Komplementi

$$N_2 = \begin{cases} N, & N \geqslant 0 \text{ için} \\ 2 - |N|, & N < 0 \text{ için} \end{cases} \tag{13.9}$$

Tablo 13.1 Ondalık (Desimal) Eşdeğer

4-Bitlik Kayıt	İşaretli Genlik	1'in Komplementi	2'nin Komplementi
0.000	-0	-0	0
0.001	1	1	1
0.010	2	2	2
0.011	3	3	3
0.100	4	4	4
0.101	5	5	5
0.110	6	6	6
0.111	7	7	7
1.000	0	-7	-8
1.001	-1	-6	-7
1.010	-2	-5	-6
1.011	-3	-4	-5
1.100	-4	-3	-4
1.101	-5	-2	-3
1.110	-6	-1	-2
1.111	-7	0	-1

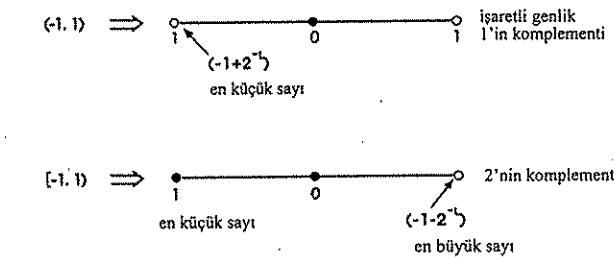
Bu yöntemde negatif sayı, en az önemli bite 1 ilave edilerek 1'in komplementi sayıdan bulunabilir. Negatif sayının tekrar elde edilmesi için sayının (N_2'nin) önce komplementi alınır sonda en az önemli bite 1 ilave edilir.

Örnek 13.4 $N = -0.11010$ sayısının 2'nin komplementi gösterilimini ve sayının tekrar elde edilmesini gösteriniz.

Çözüm.

$N = -0.11010$ için	$\Rightarrow$	$N_1 = 1.00101$
En az önemli bite ilave	$+$	0.00001
2'nin Komplementi	$\Rightarrow$	1.00110
Sayının eldesi için;		
Komp. (1.00110)		0.11001
En az önemli bite 1 ilave		0.00001
(Negatif sayının genliği)	$\Rightarrow$	0.11010
		$N = -0.11001$ □

4 bitlik bir kayıtta gösterilebilecek sayılar Tablo 13.1'de gösterilmiştir.



Şekil 13.4 Sabit-noktalı aritmetikte gösterilebilecek sayı aralıkları.

Açıklama 13.1

1. İşaretli-genlik ve 1'in komplementi gösteriliminde "0" için iki ayrı gösterilim vardır. Halbuki, 2'nin komplementinde "0" ın tek bir gösterilimi vardır.
2. $N = -1$ sayısı 2'nin komplementinde gösterilebilir. Halbuki diğerlerinde gösterilemez. Şekil 13.4'te bu durum görülmektedir.

Herbir sistemin avantaj ve dezavantajları aritmetik işlemlerin gerçekleştirilmesi sırasında tartışılacaktır.

Örnek 13.5 Şimdi, "+" ve "−" işlemlerini aşağıdaki ikili sayılarda uygulayalım.

```
 1 1 1 1 1 0 1 0 ← eldeler (carries)
   1 0 1 1 1 0 1
 + 0 1 0 0 1 0 1
 1 0 0 0 0 0 1 0

 0 1 0 0 0 1 1 0 ← ödünçler (borrows)
   1 0 1 1 1 0 0
 - 0 1 0 1 0 0 1
   0 1 1 0 0 1 1
```

1'in Komplementinde Toplama

1'in komplementinde toplama bit bit yapılır. Eldeki bit ise en önemli pozisyondan en az önemli pozisyona ilave olur (eldenin arkaya taşınması).

Örnek 13.6
1'in Komplementinde toplama

0.53125	$\Rightarrow$	0.10001
-0.40625	$\Rightarrow$	1.10010
0.12500		0.00011
		1
		0.00100

2'nin Komplementinde Toplama

2'nin komplementinde ise toplama, aynen 1'nin komplementindeki gibi yapılır. Ancak, en önemli pozisyondaki bit ihmal edilir.

Örnek 13.7
2'nin Komplementinde toplama

0.53125	$\Rightarrow$	0.10001
-0.40625	$\Rightarrow$	1.10010
0.12500	1 $\leftarrow$	0.00100
	ihmal edilir	

Görülmektedir ki, 1'in komplementi ve 2'nin komplementinde toplama işlemi oldukça basittir. Halbuki, işaretli-genlik gösteriliminde çok daha karmaşıktır.

Çarpma işlemi ise, 1'in ve 2'nin komplementi gösterilimlerinde özel algoritmalar yardımıyla gerçekleştirilir. Oysa, işaretli genlik gösteriliminde çarpma işlemi çok daha basittir. Sadece çarpımın işaret biti ayarlanır.

Açıklama 13.2 1'in ve 2'nin komplementi gösteriliminde toplamalar, arada taşma olsa dahi doğru sonuçlar vermektedir.

$$S = n_1 + n_2 + \ldots + n_i + \ldots$$

Bunu aşağıdaki örnekte görmek mümkündür.

Örnek 13.8 $L = 3$ varsayarak

$$7/8 + 4/8 + (-6/8)$$

toplamını 2'nin komplementinde gösterelim.

7/8	0.111	
+ 4/8	0.100	
11/8	1.011	$\leftarrow$ doğru olmayan ara toplam
− 6/8	+ 1.010	
5/8	0.101	$\leftarrow$ doğru toplam

Sabit-Noktalı Aritmetikteki Dezavantajlar

- Ele alınabilecek sayıların aralığı küçüktür. Örneğin, 2'nin komplementinde en küçük sayı -1, en büyük sayı ise $(1 - 2^{-L})$ dir.
- Yuvarlatma veya kesme yoluyla yapılan hata sayı küçüldükçe büyümektedir.

13.2.2 Kayan-Noktalı (Floating-Point) Aritmetik

Sabit noktalı aritmetikteki problemler, kayan-noktalı aritmetik kullanılarak azaltılır. Buna göre bir sayının gösterilimi,

$$N = M \cdot 2^e \tag{13.10}$$

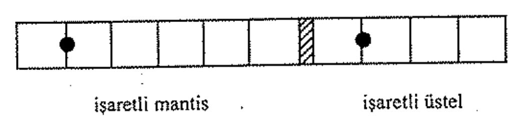
olur. e bir tamsayıdır ve

$$1/2 \leqslant M < 1 \tag{13.11}$$

M mantis ve e üstel kısım olarak adlandırılır. Bu durum, Şekil 13.5'te kayan-noktalı aritmetikli bir kaydedicide görülmektedir. Örneğin,

$$0.00110101 \rightarrow 0.110101 \times 2^{-2}$$
$$1001.11 \rightarrow 0.10011 \times 2^4$$

olarak elde edilir. Negatif sayılar aynen sabit-noktalı aritmetikte olduğu gibi ele alınır.



Şekil 13.5 Kayan-noktalı sayının gösterilimi.

Toplama

Kayan-noktalı iki sayının toplanmasında küçük olan sayının mantisi sağa doğru kaydırılarak, üstel kısımları eşit hale getirilir. Mantisler toplanır. Bulunan sonuç (13.3)'deki normal hale dönüştürülür.

Çarpma

Mantisler çarpılırken, üstel kısımlar toplanır. Sonuç, (13.3)'deki normal forma getirilir.

Kayan Noktalı Aritmetikteki Avantajlar

Dinamik aralığın artırılması yanısıra işlemlerin doğruluğu artmaktadır. Ancak, donanım olarak gerçekleştirilmesi sabit-noktalıya göre iki katı donanım gerektirir. Gerçek zamanda çalışma gerektirmeyen durumlarda tercih edilir.

13.2.3 Bilgisayarlarda Sayıların Gösterilimi

Bilgisayarlarda bilimsel ve mühendislik uygulamalarında gerçel sayıların gösterilimi için kayan-nokta yöntemi kullanılmaktadır [7].

Tek-duyarlı (single-precision) kayan-nokta gösteriliminde her bir sayı için 8 bit üstel kısım ve 24 bit mantis için ayrılmak üzere toplam 32 bit saklanmaktadır. Bu şekilde 2.93876×10^{-39}- 1.701412×10^{38} (diğer bir deyişle 2^{-128}-2^{127}) aralığında yer alan gerçel sayılar gösterilebilirler. Sayısal kesinlik ise $2^{-23} = 1.2 \times 10^{-7}$ mertebesindedir.

Çift-duyarlı (double-precision) kayan-nokta gösteriliminde her bir sayı için 11 bit üstel kısım ve 53 bit mantis için ayrılmak üzere toplam 64 bit saklanmaktadır. Bu şekilde $5.562684646269003\times10^{-309}$- $8.988465674311580\times10^{307}$ (diğer bir deyişle 2^{-1024}-2^{1023}) aralığında yer alan gerçel sayılar gösterilebilirler. Sayısal kesinlik ise $2^{-52} = 2.2 \times 10^{-16}$ mertebesindedir.

MATLAB programında gerçel sayılar için varsayılan gösterilim çift-duyarlı kayan-nokta gösterilmidir.

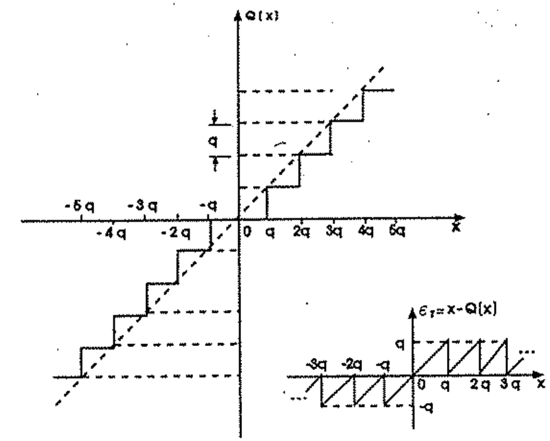
13.3 SAYILARIN KUVANTALANMASI

Bir işlemcide kelime uzunluğunun belirlenmesinden sonra aygıtta gösterilebilecek sayılar belirlidir. Eğer kelime uzunluğu (işaret biti hariç) L ise, en küçük gösterilebilecek sayı en az önemli pozisyondaki "1" sayısıdır. Bu da, 2^{-L} ile gösterilir. b bitle gösterilen bir sayı, $b > L$ olması durumunda kuvantalanır. Bu iki yöntemle, yapılır:

1. L'nin ötesindeki tüm bitler kesilip atılır (truncation).
2. Sayı gösterilebilecek en yakın sayıya yuvarlatılır (rounding).

$Q[x]$, x'in kuvantalanmış değerini gösterirse, hata ε şöyle tanımlanır.

$$\varepsilon = x - Q[x] \tag{13.12}$$



Şekil 13.6 İşaretli genlik gösteriliminde kesme işlemi ile kuvantalama ve hatası.

ε değeri, kullanılan sayı gösterilim yöntemine ve kuvantalama metoduna bağlı olarak değişir. ε'yi bu çeşitli durumlar için inceleyelim.

13.3.1 Kesme (Truncation) Durumunda Kuvantalama

Tüm sabit-noktalı gösterilimlerde pozitif sayılar aynıdır. Bu nedenle, kesme pozitif sayıyı küçültür. Yani, ε pozitiftir. b bitlik sayının ($b > L$) tüm bitleri "1" ise ε'nin maksimum değeri

$$0 \leqslant \varepsilon_T \leqslant 2^{-L} - 2^{-b}, \quad x \geqslant 0 \text{ için}$$

Negatif sayılar için her üç gösterilim ayrı ayrı ele alınmalıdır.

a) İşaretli-Genlik

Bu gösterilimde, kesme işlemi sayının genliği azaltılırken işaretli değerini artırır. Yani,

$$Q[x] > x \tag{13.13}$$

veya

$$-(2^{-L} - 2^{-b}) \leqslant \varepsilon_T \leqslant 0, \quad x < 0 \text{ için} \tag{13.14}$$

yazılabilir. Şekil 13.6'da $Q[x]$ ve ε_T görülmektedir.

b) 1'in Komplementi

$$x = \sum_{i=1}^{b} b_i 2^{-i} \tag{13.15}$$

b_i'nin değeri "0" yada "1" dir. Bu sayı, 1'in komplementinde,

$$x_1 = 2 - 2^{-L} \sum_{i=1}^{b} b_{-i} 2^{-i} \tag{13.16}$$

olarak gösterilir. Eğer, tüm atılan bitler "0" lardan oluşursa, $\varepsilon = 0$ olur. Diğer yandan atılan bitlerin tamamı "1" ise,

$$Q[x_1] = 2 - 2^{-L} - \sum_{i=1}^{b} b_{-i} 2^{-i} - (2^{-L} - 2^{-b}) \tag{13.17}$$

$Q[x_1]$'in ondalık eşdeğeri,

$$Q[x_1] = -\sum_{i=1}^{b} b_{-i} 2^{-i} + (2^{-L} - 2^{-b}) \tag{13.18}$$

Buradan,

$$0 \leqslant \varepsilon_T < 2^{-L} - 2^{-b}, \quad x < 0 \text{ için} \tag{13:19}$$

Aynı eşitsizlik, 2'nin komplementi içinde geçerlidir. O halde, işaretli-genlik gösterilimi için

$$-q \leqslant \varepsilon_T < q, \quad q = 2^{-L} \tag{13.20}$$

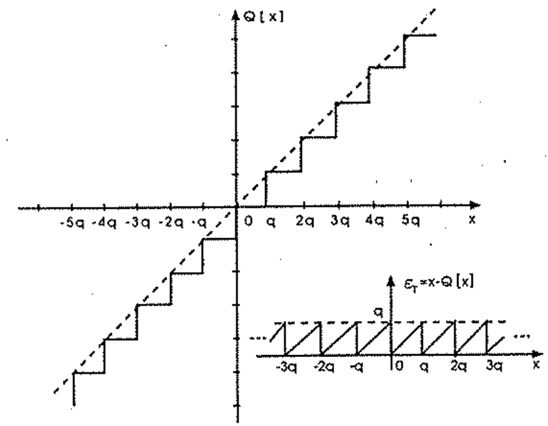
olur. Kuvantalama hatası, yeteri kadar büyük L değeri kullanılarak küçük tutulur. Şekil 13.7'de 1'in ve 2'nin komplementinde kesmede oluşan kuvantalama hataları görülmektedir.

13.3.2 Yuvarlatma (Rounding) Durumunda Kuvantalama

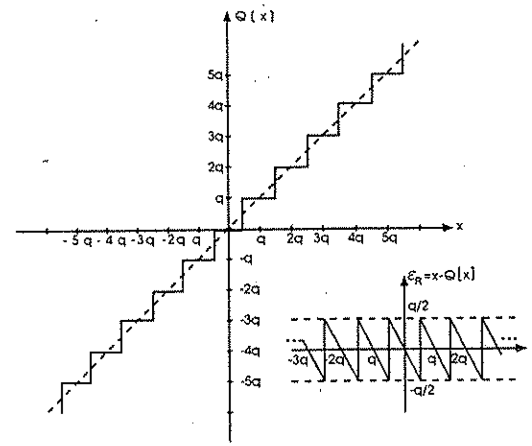
Yuvarlatma pratikte $(L+1)$ pozisyonundaki bite 1 ilave edip bit sayısını L'de keserek gerçekleştirilir. O halde, kuvantalama hatası pozitif veya negatif olabilir. Yuvarlatma hatası, ε_R, $q = 2^{-L}$ olduğuna göre

$$-q/2 \leqslant \varepsilon_R < q/2 \tag{13.21}$$

yazılabilir. Yuvarlatma hatası Şekil 13.8'de görülmektedir.



Şekil 13.7 1'in ve 2'nin komplementi gösteriliminde kesme işlemi ile kuvantalama hatası.



Şekil 13.8 Tüm sistemler için yuvarlatma işlemi ile kuvantalama ve hatası.

13.4 KATSAYILARIN KUVANTALANMASI

Katsayıların kuvantalanması, transfer fonksiyonunun sıfır ve kutuplarının yerlerinin değişmesine neden olmaktadır. Bunun sonucu olarak elde edilen frekans cevabı da değişir. Kelime uzunluğu (kullanılan bit sayısı) frekans-cevabını istenen toleranslar içinde sağlayacak biçimde seçilmelidir.

$H(z)$ transfer fonksiyonu ile karakterize edilen bir sayısal süzgeci ele alalım. Bu süzgeçte,

$M(\Omega)$: $=M(e^{j\Omega T})$ kuvantalama öncesi genlik cevabını,

$M_Q(\Omega)$: Kuvantalama sonrası genlik cevabını,

$M_I(\Omega)$: İdeal genlik cevabını,

δ_p, δ_s: Geçirme ve durdurma bandına ait genlik cevabı toleranslarını göstersin.

Katsayıların kuvantalanması $M(\Omega)$ üzerinde ΔM hatasına neden olur.

$$\Delta M = M(\Omega) - M_Q(\Omega) \tag{13.22}$$

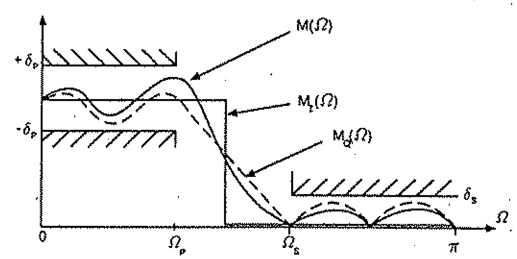
$|\Delta M|$'nin maksimum değeri $\Delta M_{\max}(\Omega)$ ile gösterilirse, Şekil 13.9'dan

$$\Delta M_{\max}(\Omega) = \begin{cases} \delta_p - |M(\Omega) - M_I(\Omega)|, & \Omega \leqslant \Omega_p \\ \delta_s - |M(\Omega) - M_I(\Omega)|, & \Omega \geqslant \Omega_s \end{cases} \tag{13.23}$$

yazılabilir. Eğer,

$$|\Delta M| \leqslant \Delta M_{\max}(\Omega) \tag{13.24}$$

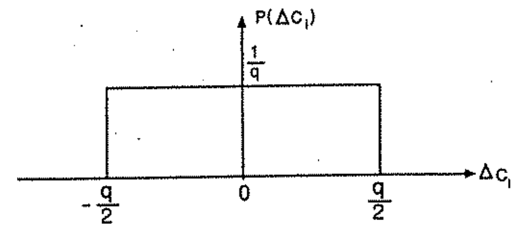
şartı sağlanırsa, arzu edilen frekans karakteristiği gerçekleştirilir.



Şekil 13.9 Katsayı kuvantalaması.

Optimum kelime uzunluğu (13.24) şartını sağlayacak şekilde kelime uzunlukları denenerek araştırılabilir. Ancak, bu metod yoğun bir hesaplama gerektirmektedir. Alternatif metod, Crochiere [2] tarafından geliştirilen istatistiksel yöntemdir. Bu metodla oldukça doğru kelime uzunluğu tahmini gerçekleştirilir. Katsayılarını kuvantalama etkisini göstermek için yapılacak analizde, noktalı aritmetik kullandığımızı ve yuvarlatma yoluyla kuvantalamayı gerçekleştirdiğimiz varsayalım. Eğer transfer fonksiyonunun katsayıları $c_i, = 1, 2, \ldots, M$ ile gösterilirse, kuvantalama hatası

$$-\frac{q}{2} \leqslant \Delta c_i \leqslant \frac{q}{2} \tag{13.25}$$



Şekil 13.10 Katsayı kuvantalama hatasının olasılık yoğunluk fonksiyonu.

arasında olacaktır. Δc_i rastgele bir değişkendir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu Şekil 13.10'da görüldüğü gibi düzgün dağılımlıdır.

$$P(c_i) = \begin{cases} 1/q & -\frac{q}{2} \leqslant \Delta c_i \leqslant \frac{q}{2} \\ 0 & \text{aksi durumda} \end{cases} \tag{13.26}$$

Şimdi, Şekil 13.10'da bu rastgele değişkenin ortalama değeri $E(\Delta c_i)$ ve varyansı $\sigma^2_{\Delta c_i}$ yi hesaplayalım.

$$E[\Delta c_i] = \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q}\Delta c_i d(\Delta c_i) = \frac{1}{2q}\Delta c_i^2\Big|_{-q/2}^{q/2} = 0 \tag{13.27}$$

$$\sigma^2_{\Delta c_i} = E[\Delta c_i^2] = \frac{1}{3q}[q^3/8 + q^3/8] = \frac{q^2}{12} \tag{13.28}$$

ΔM'nin $M(\Omega)$'daki değişimi de bir rastgele değişkendir. Taylor teorimi yardımıy

$$\Delta M = \sum_{i=1}^{M} \Delta c_i S_{c_i} \tag{13.29}$$

$$S_{c_i} = \frac{\partial M(\Omega)}{\partial c_i} \tag{13.30}$$

yazılabilir. S_{c_i}, $M(\Omega)$'nın c_i katsayısına göre duyarlılığıdır. Buradan,

$$E[\Delta M] = \sum_{i=1}^{M} S_{c_i} E[\Delta c_i] = 0 \tag{13.31}$$

Eğer Δc_i ve Δc_j $(i \neq j)$ istatistiksel olarak bağımsız rastgele değişken ise,

$$\sigma^2_{\Delta M} = \sum_{i=1}^{M} \sigma^2 \Delta c_i S^2_{c_i} \tag{13.32}$$

yazılabilir. Ayrıca, (13.28)'den $\sigma_{c_i}^2 = (q^2/12)$, $i = 1, 2, \ldots, M$ bilindiğinden

$$\sigma_{\Delta M}^2 = \frac{q^2}{12} S_T^2 \tag{13.33}$$

$$S_T^2 = \sum_{i=1}^{M} S_{c_i}^2 \tag{13.34}$$

elde edilir. Merkezi limit-teoremi yardımıyla ΔM'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$P(\Delta M) = \frac{e^{(-\Delta M^2/2\sigma_{\Delta M}^2)}}{\sigma_{\Delta M}\sqrt{2\pi}}, \quad -\infty \leqslant \Delta M \leqslant \infty \tag{13.35}$$

M'nin $-\Delta M_1 \leqslant \Delta M \leqslant \Delta M_1$ aralığında kalma olasılığı y ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} y &= Pr\left[|\Delta M| \leqslant \Delta M_1\right] \\ &= \frac{2}{\sigma\Delta\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta M1} \exp(-\Delta M^2/2\sigma_{\Delta M}^2) d(\Delta M) \end{aligned} \tag{13.36}$$

$$\Delta M = x\sigma_{\Delta M}, \quad \Delta M_1 = x_1\sigma \tag{13.37}$$

değişken dönüşümü ile,

$$y = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{X_1} e^{-x^2/2} dx \tag{13.38}$$

elde edilir. Kabul edilecek y emniyet faktörü seçildikten sonra, tablo yardımıyla x_1 değeri bulunur. ΔM_1, ΔM için istatistiksel sınırı göstermektedir. Eğer, kelime uzunluğu

$$\Delta M_1 \leqslant \Delta M_{\max}(\Omega) \tag{13.39}$$

şartını sağlayacak biçimde seçilirse arzu edilen karakteristik sağlanacaktır. Sonuç olarak, bulunan kelime uzunluğu istatistiksel kelime uzunluğudur.

(13.33), (13.37) ve (13.39)'dan,

$$q \leqslant \frac{\sqrt{12}\Delta M_{\max}(\Omega)}{x_1 S_T} \tag{13.40}$$

bulunur.

Kayıt edici en büyük katsayının kuvantalanmış değerini gösterilebilecek uzunlukta olmalıdır. Yani,

$$Q[\max c_i] = \sum_{i=-K}^{J} b_i 2^i, \quad b_J \neq 0, b_{-K} \neq 0 \tag{13.41}$$

O halde gerekli kelime uzunluğu,

$$L = 1 + K + J \tag{13.42}$$

olarak bulunur. Ayrıca, $q = 2^{-K}$ olduğundan,

$$K = \log_2 \frac{1}{q} \tag{13.43}$$

O halde, arzu edilen sonuç, (13.40), (13.42) ve (13.43)'den,

$$L \geqslant L(\Omega) = 1 + J + \log_2 \frac{x_1 S_T}{\sqrt{12}\Delta M_{\max}(\Omega)} \tag{13.44}$$

olarak elde edilir. Gerçek kelime uzunluğu ile istatistiksel uygunluk $x_1 = 2$ alınarak sağlanır. Bu x_1 değeri %95 emniyeti yada uygunluğu gösterir.

Kelime uzunluğunun bulunmasında gereken S_{c_i} duyarlıkları ise şöyle hesaplanır.

$$S_{c_i}^H(e^{j\Omega T}) = \frac{\partial H(e^{j\Omega T})}{\partial c_i} = Re\left[S_{c_i}^H(e^{j\Omega T})\right] + jIm\left[S_{c_i}^H(e^{j\Omega T})\right]$$

$$H(e^{j\Omega T}) = M(\Omega)e^{j\theta(\Omega)}$$

ise,

$$Re\left[S_{c_i}H(e^{j\Omega T})\right] = \cos\left[\theta(\Omega)\right]\frac{\partial M(\Omega)}{\partial c_i} - M(\Omega)\sin\left[\theta(\Omega)\right]\frac{\partial\theta(\Omega)}{\partial c_i}$$

$$Im\left[S_{c_i}H(e^{j\Omega T})\right] = \sin\left[\theta(\Omega)\right]\frac{\partial M(\Omega)}{\partial c_i} + M(\Omega)\cos\left[\theta(\Omega)\right]\frac{\partial\theta(\Omega)}{\partial c_i}$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned} S_{c_i} = \frac{\partial M(\Omega)}{\partial c_i} &= \cos\left[\theta(\Omega)\right] Re\left[S_{c_i}H(e^{j\omega})\right] \\ &+ \sin\left[\theta(\Omega)\right] Im\left[S_{c_i}H(e^{j\Omega})\right] \end{aligned}$$

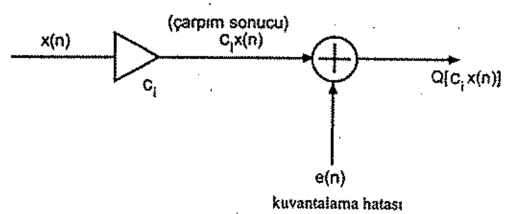
olarak bulunur.

13.5 İŞLEMLERİN KUVANTALANMASI

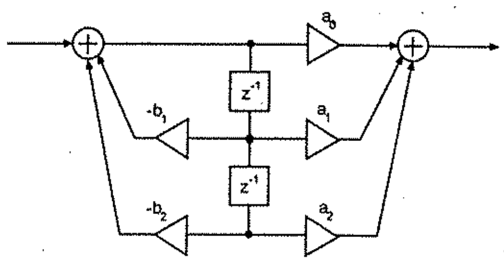
Sınırlı-kelime uzunluğu olan çarpıcının çıkışı

$$Q\left[c_i x(n)\right] = c_i x(n) + e(n)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $e(n)$ bir gürültü kaynağıdır. Şekil 13.11'de çarpım sonucu gürültünün ortaya çıkması görülmektedir.



Şekil 13.11 Çarpma işlemi sonucunun kuvantalanması işleminin gürültü ile modellenmesi.



Şekil 13.12 İkinci derece kanonik yapıda sayısal süzgeç.

Sabit-noktalı aritmetik kullanıldığını farzederek Şekil 13.12'deki ikinci dereceden sayısal süzgeç için işlemlerde (çarpımlarda) oluşan kuvantalama hatalarının sonuca etkisini hesaplayalım. Herbir çarpma işlemi sonucu, yuvarlatma yoluyla kuvantalama yapılırsa, gürültü işareti $e_i(n)$ rastgele bir işarettir. Gürültünün olasılık dağılım fonksiyonu düzgündür.

$$P(e_i(n)) = \begin{cases} 1/q, & -q/2 \leqslant e_i(n) \leqslant q/2 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

Bölüm 13.4'te gösterildiği üzere,

$$E[e_i(n) = 0]$$

$$\sigma_{e_i}^2 = E\left[e_i^2(n)\right] = q^2/12, \ (q = 2^{-L})$$

yazılabilir. Ayrıca, $e(n)$ gürültüsünün özilişki fonksiyonu

$$r_{e_i}(k) = E[e_i(n)e_i(n+k)]$$

olarak tanımlanır. Eğer süzgeçteki işaret seviyesi q'ya oranla çok büyük ise, aşağıdaki varsayımlar yapılabilir.

1. $e_i(n)$ ve $e_j(n+k)$ istatistiksel olarak n'nin her değeri için bağımsızdır ($k \neq 0$).
2. $e_i(n)$ ve $e_i(n+k)$ tüm n veya k değerleri için istatistiksel olarak bağımsızdır ($i \neq j$).

Yukarıdaki birinci varsayım dikkate alınarak,

$$r_{e_i}(0) = E\left[e_i^2(n)\right] = q^2/12 \tag{13.45}$$

$$\begin{aligned} r_{e_i}(k)\Big|_{k\neq 0} &= E[e_i(n)e_i(n+k)] \\ &= E\left[e_i(n)\right] E\left[e_i(n+k)\right] = 0 \end{aligned} \tag{13.46}$$

bulunur. O halde, $e_i(n)$ gürültüsünün özilişki fonksiyonu

$$R_{e_i}(k) = (q^2/12)\delta(k) \tag{13.47}$$

olur. (13.47)'de spektral güç yoğunluk fonksiyonu

$$S_{e_i}(z) = \mathcal{Z}[r_{e_i}(k)] = q^2/12 \tag{13.48}$$

olarak elde edilir.

İkinci varsayım dikkate alınırsa, $e_i(n) + e_j(n)$ toplamının özilişki fonksiyonu,

$$\begin{aligned} r_{e_i+e_j}(k) &= E[\{e_i(n) + e_j(n)\}\{e_i(n+k) + e_j(n+k)\}] \\ &= E[e_i(n)e_i(n+k)] + E[e_i(n)]E[e_j(n+k)] \\ &\quad + E[e_j(n)]E[e_i(n+k)] + E[e_j(n)e_j(n+k)] \\ &= r_{e_i}(k) + r_{e_j}(k) \end{aligned} \tag{13.49}$$

olarak bulunur. O halde, toplamın güç spektral yoğunluk fonksiyonu

$$S_{e_i+e_j}(z) = \mathcal{Z}[r_{e_i}(k) + r_{e_j}(k)] = S_{e_i}(z) + S_{e_j}(z) \tag{13.50}$$

olur. (13.50)'den gürültü etkisinin hesabında süperpozisyon kuralı uygulanabileceği görülmektedir. Buna göre, Şekil 13.12'deki süzgeç çıkışı $y(n)$'de işlem kuvantalanmanın etkisi, süzgecin transfer fonksiyonu $H(z)$'den yararlanarak,

$$S_y(z) = H(z)H(z^{-1})\sum_{i=1}^{2} S_{e_i}(z) + \sum_{i=3}^{5} S_{e_i}(z) \tag{13.51}$$

olarak yazılabilir. (13.48)'den $S_{e_i}(z)$ yerine,

$$S_{e_i}(z) = (q^2/12), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{13.52}$$

konularak, çıkışın güç spektral yoğunluk fonksiyonu

$$S_y(z) = (q^2/6)H(z)H(z^{-1}) + (q^2/4) \tag{13.53}$$

elde edilir.

Açıklama 13.3

a) Transfer fonksiyonu $H(z)$ ile karakterize edilen bir süzgecin giriş ve çıkışları sırası ile $x(n)$ ve $y(n)$ olsun. Eğer, $x(n)$ rastgele bir değişken olup $S_x(z)$ güç spektral yoğunluk fonksiyonu ile karakterize edilir ise, çıkış işareti $y(n)$'nin güç spektral yoğunluk fonksiyonu

$$S_y(z) = H(z)H(z^{-1})S_x(z) \tag{13.54}$$

olarak elde edilir.

b) Giriş işareti $x(n)$'nin ortalaması sıfır ve varyansı σ_x^2 ile gösterilen bir rastgele işaret ise, çıkış işareti $y(n)$'nin varyansı

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_y(e^{j\theta})d\theta \tag{13.55}$$

ifadesinden hesaplanır. Buradan Şekil 13.13'teki sayısal süzgecin kuvantalama hatasının çıkış işareti üzerindeki varyansı (13.53)'den,

$$\sigma_y^2 = \frac{q}{4} + \frac{q^2}{6}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|H(e^{j\theta})\right|^2 d\theta \tag{13.56}$$

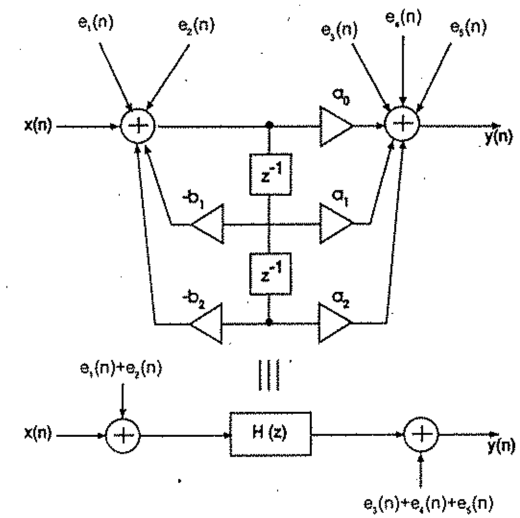
olarak bulunur. Ayrıca, Parvesal teoremini kullanarak, (13.56) ifadesi

$$\sigma_y^2 = \frac{q}{4} + \frac{q^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \tag{13.57}$$

biçiminde yazılabilir.

Örnek 13.9 Direkt-formda gerçekleştirilen sayısal süzgeçte yuvarlatma hatalarının çıkışa olan etkisini inceleyelim.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b(k)y(n-k) \tag{13.58}$$



Şekil 13.13 Şekil 13.12'deki sayısal süzgeçteki işlem kuvantalanmasının gürültü ile modellenmesi.

fark-denklemi ile belirlenen süzgecin direkt-formda gerçekleştirilmesi Şekil 2.7'de görülmektedir. $x(n)$ ve $y(n)$ sabit-noktalı gösterilimde olup $a(k)x(n-k)$ ve $b(k)y(n-k)$ çarpımları da L bitle yuvarlatılmıştır. Buna göre, kuvantalanmış çıkış

$$y^1(n) = \sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b(k)y^1(n-k) + \delta(n) \tag{13.59}$$

olarak yazılabilir.

$\delta(n)$, $(M+N+1)$ çarpma işlemi sonucunda oluşan yuvarlatma hataları toplamını göstermektedir. O halde, $\delta(n)$'nin ortalaması ve varyansı için

$$E[\delta(n)] = 0 \tag{13.60}$$

$$\sigma^2_{\delta(n)} = E\left[\delta^2(n)\right] = (M+N+1)(q^2/12) \tag{13.61}$$

yazılabilir. Kuvantalama sonucu çıkışda oluşacak hata $\epsilon_y(n)$ (13.58) ve (13.59) denklemlerinden bulunabilir.

$$\begin{aligned}\epsilon_y(n) &= y^1(n) - y(n)\\ &= \sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b(k)y^1(n-k) + \delta(n)\\ &- \sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k) + \sum_{k=1}^{N} b(k)y(n-k)\\ &= \sum_{k=1}^{M} b(k)(y(n-k) - y^1(n-k)) + \delta(n)\end{aligned} \tag{13.62}$$

olur. Burada $\epsilon_y(n)$ tanımından yararlanarak,

$$y(n-k) - y^1(n-k) = -\epsilon_y(n-k) \tag{13.63}$$

yazılabilir. (13.62) ve (13.63)'den

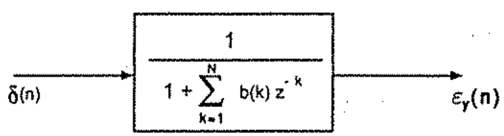
$$\epsilon_y(n) = -\sum_{k=1}^{N} b(k)\epsilon_y(n-k) + \delta(n) \tag{13.64}$$

elde edilir. Her iki tarafın z-dönüşümü alınarak,

$$E_y(z)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} b(k)z^{-k}\right] = \Delta(z) \tag{13.65}$$

$$\frac{E_y(z)}{\Delta(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} b(k)z^{-k}} \tag{13.66}$$

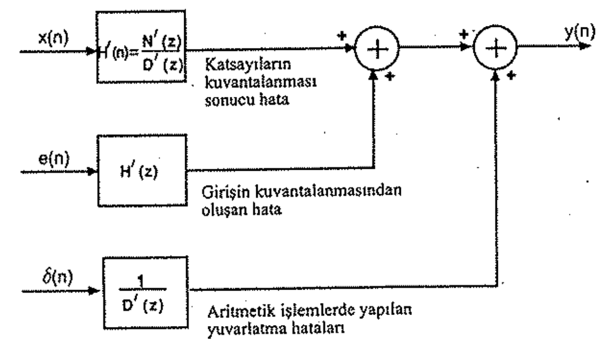
bulunur. Aritmetik işlemlerdeki kuvantalama sonucu yapılan hatanın çıkışa etkisi Şekil 13.14'te görülmektedir.



Şekil 13.14 Aritmetik işlemlerde yapılan hatanın çıkış işaretine etkisi.

(13.61)'deki $\sigma^2_{\delta(n)}$ den $E_y(n)$'nin varyansı bulunabilir. Gerçekten, $E_y(n)$ nin güç yoğunluk spektrumu (13.61) ve (13.66)'dan

$$S_{\epsilon_y}(e^{j\theta}) = (M+N+1)\frac{q^2}{12}\frac{1}{\left|1 + \sum_{k=1}^{N} b(k)e^{-j\theta k}\right|^2} \tag{13.67}$$



Şekil 13.15 Şekil 2.7'de verilen direkt formda karşılaşılan hataların çıkışa olan etkisi.

yazılabilir. (13.55)'den hatanın çıkışa etkisinin varyansı,

$$\sigma^2_{\epsilon_y} = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} S_{\epsilon_y}(e^{j\theta}) \doteq (M+N+1)\frac{q^2}{12}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\left|1 + \sum_{k=1}^{N} b(k)e^{-j\theta k}\right|^2} \tag{13.68}$$

olarak elde edilir. Direkt formda karşılaşılan tüm hatalar Şekil 13.15'te gösterilmiştir.

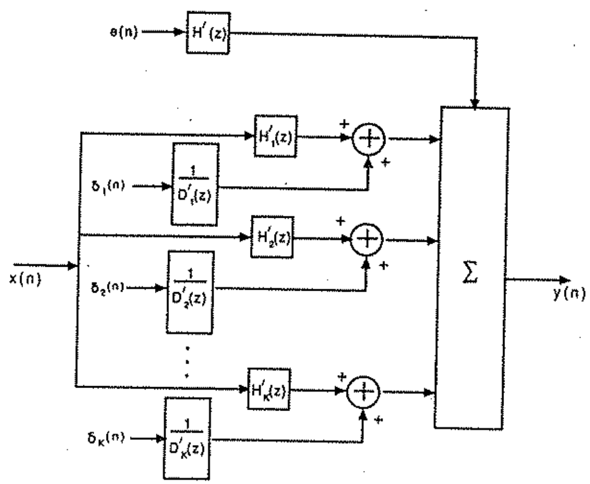
Örnek 13.10 İkinci dereceden bölümlerin paralel bağlanması ile elde edilen paralel gerçekleştirmede kuvantalama hatalarının çıkışa olan etkisini hesaplayalım [3]. Süzgecin transer fonksiyonu

$$H(z) = \sum_{i=1}^{K} H_i(z) \tag{13.69}$$

$$H_i(z) = \frac{N_i(z)}{D_i(z)} = \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, K \tag{13.70}$$

olarak verildiğine göre, aritmetik yuvarlatma hatalarının varyansı

$$\begin{aligned}E\left[\delta_i^2(n)\right] = \sigma^2_{\delta_i} &= (M+N+1)q^2/12\\ &= (1+2+1)q^2/12\\ &= q^2/3\end{aligned} \tag{13.71}$$



Şekil 13.16 Paralel formda karşılaşılan tüm hatalar.

olur. O halde, bu hataların çıkışa olan toplam etkisinin varyansı

$$\sigma_{e_y}^2 = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{q^2}{3}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|D_i(e^{j\theta})|^2} \tag{13.72}$$

olarak bulunur.

Paralel formda karşılaşılan tüm hatalar Şekil 13.16'da görülmektedir.

Örnek 13.11 İki kutup ve iki sıfırdan oluşan seri bağlı bölümlerden bir gerçekleştirmede kuvantalama hatalarının çıkışa olan etkisini inceleyelim.

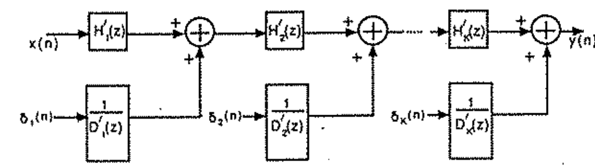
Süzgecin transfer fonksiyonu,

$$H(z) = \prod_{i=1}^{K} H_i(z) \tag{13.73}$$

$$H_i(z) = \frac{N_i(z)}{D_i(z)} = \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \tag{13.74}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned} E\left[\delta_i^2(n)\right] = \sigma_{\delta_i}^2 &= (M + N + 1)q^2/12 \\ &= (2 + 2 + 1)q^2/12 \\ &= 5q^2/12 \end{aligned} \tag{13.75}$$



Şekil 13.17 Seri formda gerçekleştirmede yuvarlatma hatalarının etkisi.

olur. Aritmetik işlemlerde yapılan yuvarlatma hatalarının çıkışa etkisinin varyan

$$\sigma_{e_y}^2 = (5\frac{q^2}{12})\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\prod_{m=i+1}^{K} H_m(e^{j\theta})}{D_i(e^{j\theta})} \right|^2 d\theta \tag{13.76}$$

Bu gerçekleştirmenin blok diyagramı Şekil 13.17'de verilmektedir.

13.6 İŞARET GENLİĞİNİN ÖLÇEKLENMESİ

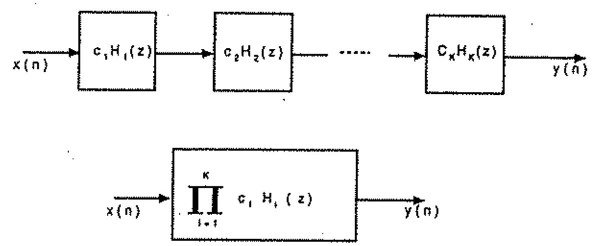
Ara işlemlerde elde olunan sayıların genliği sabit-noktalı aritmetikte dinamik aralığı aşarsa çıkış işaretine taşma yani bozulma oluşur. Diğer yandan, süzgeçlemede işaretin genliği çok küçük tutulursa işaretin gürültüye oranı çok zayıftır. Bu nedenle, optimum süzgeç performansı için işaret genliğinin ölçeklenmesi (scaling) çeşitli seviyelerde gerçekleştirilmelidir. Burada sadece seri durum incelenecektir.

$$H(z) = \prod_{i=1}^{K} H_i(z) \tag{13.77}$$

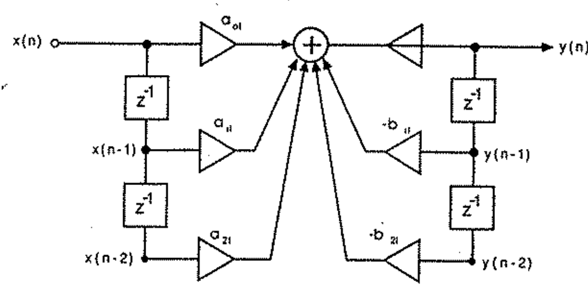
Herbir seri bölümün transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$H_i(z) = \frac{N_i(z)}{D_i(z)} = \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \tag{13.78}$$

Bu transfer fonksiyonun Şekil 13.18'de olduğu gibi gerçekleştirildiğini varsayalım. Çıkışın taşmasını önlemek için giriş işareti $x(n)$'nin genliğinin ölçeklenmesi gerekmektedir. Yani, $y(n)$'nin değeri dinamik aralık içinde kalmalıdır. Ayrıca, Şekil 13.19'da görüldüğü gibi $c_i, i = 1, 2, 3, \ldots, K$ sabit katsayıları $|x(n)| \leqslant 1$ ise çıkışın da $|y(n)| \leqslant 1$ olmasını sağlamaktadır. Şimdi, bu c_i katsayılarının belirlenmesi için literatürdeki metodların bazılarını inceleyelim.



Şekil 13.19 Seri bağlı bölümlerden oluşan süzgeçte işaret genliğinin ayarlanması.



Şekil 13.18 (13.78)'deki transfer fonksiyonunun gerçekleştirilmesi.

13.6.1 L_1-Normuna Göre Ölçekleme

Bu kriter oldukça tutucu olup dinamik değişme aralığının küçülmesine neden olmaktadır. $|x(n) \leqslant 1|$ olması durumunda $|y(n)| \leqslant 1$ olmalıdır.

$h_i(k)$ seri bağlı i. bölümün impuls cevabı olduğuna göre, konvolüsyon ifadesinden

$$y(n) = c_i \sum_{k=0}^{\infty} h_i(k) x(n-k) \tag{13.79}$$

yazılabilir. Her iki tarafın mutlak değeri alınarak,

$$|y(n)| = c_i \left| \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k) \right| \leqslant c_i \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \tag{13.80}$$

bulunur. Eğer, $|x(n-k)| \leqslant 1$ ise,

$$|y(n)| \leqslant c_i \sum_{k=0}^{\infty} |h_i(k)| \tag{13.81}$$

$$c_i \leqslant \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} |h_i(k)|} \tag{13.82}$$

Bu yöntemde işaretin birden çok küçük olması durumunda ($|x(n)| \ll 1$) dinamik değişme aralığı verimli olarak kullanılmaz.

13.6.2 L_∞-Normuna Göre Ölçekleme

Önce L_p normu notasyonunu tanımlayalım:

Ω_s periyotlu herhangi bir $A(\omega)$ fonksiyonunun L_p-normu şöyle tanımlanır.

$$\|A\|_p = \left[\frac{1}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} |A(\omega)|^p d\omega \right]^{1/p}, \quad p \geqslant 1 \tag{13.83}$$

Eğer, $A(\omega)$ sürekli ve

$$\int_0^{\omega_s} |A(\omega)|^p d\omega < \infty \tag{13.84}$$

ise aşağıdaki limit mevcuttur:

$$\lim_{p \to \infty} \|A\|_p = \|A\|_\infty = \max_{0 \leqslant \omega \leqslant \omega_s} |A(\omega)| \tag{13.85}$$

$x(n)$ giriş işaretinin $x(n) = \cos(n\lambda)$ biçiminde sinüzoidal olduğunu varsayalım. Örnek 2.7'den doğrusal sistemlerde çıkış işaretinin sadece fazı ve genliği farklı

$$y(n) = A\cos(n\lambda + \theta) \tag{13.86}$$

formunda bir sinüzoid olduğu bilinmektedir. Burada genlik,

$$A = c_i |H_i(e^{j\lambda})| \tag{13.87}$$

olacaktır. $(A) \leqslant 1$ olmasını garanti etmek için (13.85)'deki L_∞ normuna göre

$$\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant \pi} c_i |H_i(e^{j\lambda})| \leqslant 1 \tag{13.88}$$

olur. Buradan,

$$c_i \leqslant \frac{1}{\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant \pi} |H_i(e^{j\lambda})|} = \frac{1}{\|H_i\|_\infty} \tag{13.89}$$

elde edilir. İlk metodun aksine bu yöntem çok daha optimal bir yaklaşımdır.

13.6.3 L_2-Normuna Göre Ölçekleme

Her iki tarafın mutlak değerlerinin karesini alabiliriz.

$$|y(n)|^2 = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_i H_i(e^{j\theta}) X(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta \right|^2 \tag{13.90}$$

Schwartz eşitsizliğini kullanarak, (13.90) ifadesi

$$|y(n)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |c_i H_i(e^{j\theta})|^2 d\theta \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\theta})|^2 d\theta \tag{13.91}$$

formunda yazılabilir. Ayrıca, Parseval teoriminden, giriş işaretinin enerjisinin

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\theta})|^2 d\theta \tag{13.92}$$

olduğunu biliyoruz. O halde (13.92) eşitsizliği

$$|y(n)|^2 \leqslant c_i^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_i(e^{j\theta})|^2 d\theta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x^2(n) \right\} \tag{13.93}$$

olur. $|y(n)| \leqslant 1$ olabilmesi için

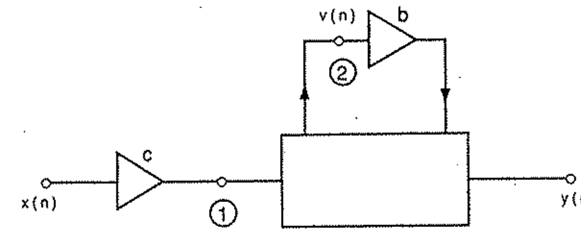
$$c_i \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta})|^2 d\theta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x^2(n) \right\}}} \tag{13.94}$$

koşulunu sağlamalıdır.

13.6.4 İstatistiksel Metod Kullanılarak Ölçekleme

$x(n)$ girişinin güç yoğunluk spektrumu $\Phi_x(e^{j\theta})$ ve buna karşı düşen çıkışın güç yoğunluk spektrumu ise $\Phi_y(e^{j\theta})$ olsun. O halde, çıkışın varyansı şöyle yazılır.

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E\left[y^2(n)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_y(e^{j\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_x(e^{j\theta}) |c_i H_i(e^{j\theta})|^2 d\theta \end{aligned} \tag{13.95}$$



Şekil 13.20 İşaret genliğinin ayarlanmasında dal düğüm noktasının gösterilimi.

Bu denklemde, $\Phi_x(e^{j\theta}) = E\left[x^2(n)\right] = \sigma_x^2$ olduğunu varsayarak,

$$\sigma_y^2 = c_i^2 \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi} \left| H_i(e^{j\theta}) \right|^2 d\theta \tag{13.96}$$

biçiminde yazılır. Ayrıca $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$ olduğu kabul edilir ise,

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} h^2(k)}} \tag{13.97}$$

olarak elde edilir.

Açıklama 13.4

1. İkiden daha fazla sayının toplanmasında, eğer doğru toplam taşma olmayacak kadar küçük olursa, 1'in ve 2'nin komplementine dayalı aritmetik sistemlerde ara sonuçlarda oluşan taşımaya rağmen doğru sonuç elde edilir. Toplam sırası önemli değildir. Ayrıca toplayıcıya gelen girişlerin kendileri taşmış olsalar da bu durum geçerlidir. Taşmayı önleyici donanım gerçekleştirilirken bu çok önemli özellikten yararlanılır.
2. Şekil 13.19'da görmüş olduğumuz kaskat yapıda sadece bir tek düğüm noktası için dinamik aralık (dynamic range) koşulu vardır. Halbuki, en genel durumda devre içinde bunun sayısı birden fazla olabilir. Bu türden dikkat edilmesi gereken noktalara "dal düğüm noktaları" (branch nodes) adı verilir.

Bu amaçla, Şekil 13.20'yi ele alalım. (1) ve (2) noktaları arasındaki transfer fonksiyonu $F(z)$ olsun, buna göre $|x(n)| \leqslant 1$ olması durumunda $|v(n)| \leqslant 1$ olabilmesi için, (13.89)'dan L_∞ normu kullanarak c katsayısının

$$c \leqslant \frac{1}{\|F\|_\infty} \tag{13.98}$$

koşulunu sağlaması gerektiğini biliyoruz. Eğer, (13.16)'daki devrede m adet farklı "dal düğüm noktası" var ise, tüm çarpımların sonucunun 1 ile sınırlandırılabilmesi için,

$$c = \min(c_1, c_2, \ldots, c_m) \tag{13.99}$$

veya

$$c = \frac{1}{\max(\|F_1\|_\infty, \|F_2\|_\infty, \ldots, \|F_m\|_\infty)} \tag{13.100}$$

olarak bulunur. Şimdi aşağıdaki örnekte dal düğüm noktalarını da dikkate alacak biçimde katsayıların ölçeklenmesini inceleyelim.

Örnek 13.12 Şekil 13.21'de gösterilen seri bağlı süzgeçlerdeki c_0, c_1 ve c_2 katsayılarını bulalım. j. bloktaki kritik noktalar $y_j'(n)$ ve $y_j(n)$ noktalarıdır. Bu noktalarda taşma olmadığı durumda, blok içinde noktalarda kelime uzunluğunda taşma olmayacaktır. Gerçekten, $-b_{1j}$ ve b_{2j} çarpıcılarının girişleri $y_j(n)$ nin geciktirilmiş değerleridir. Giriş ile $y_j'(n)$ ve $y_j(n)$ noktaları arasındaki transfer fonksiyonları $F_j'(z)$ ve $F_j(z)$ Şekil 13.21(b)'deki devre yapısından,

$$F_j'(z) = \frac{z^2}{z^2 + b_{1j}z + b_{2j}} \tag{13.101}$$

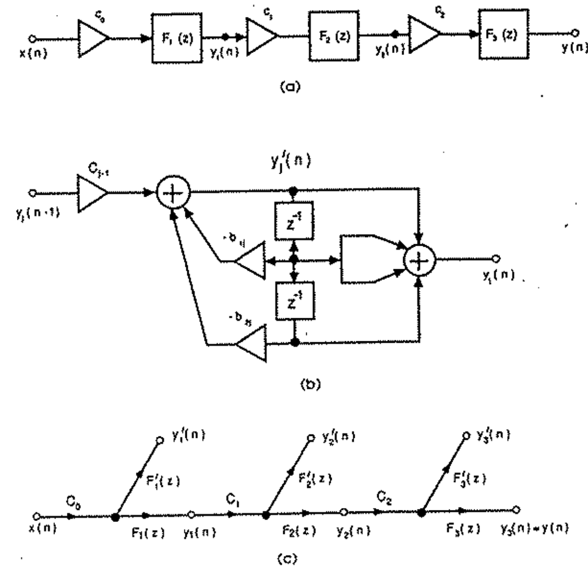
bulunur. Şekil 13.21(c)'deki işaret-akış diyagramı yardımı ile c_0, c_1, c_2 katsayıları,

$$c_0 = \frac{1}{\max(\|F_1'\|_\infty, \|F_1\|_\infty)} \tag{13.102}$$

$$c_1 = \frac{1}{c_0 \max(\|F_1 F_2'\|_\infty, \|F_1 F_2\|_\infty)} \tag{13.103}$$

$$c_2 = \frac{1}{c_0 c_1 \max(\|F_1 F_2 F_3'\|_\infty, \|F_1 F_2 F_3\|_\infty)} \tag{13.104}$$

olarak bulunur.



Şekil 13.21 a) Kaskat süzgeç; b) Herbir bölümün gösterilimi (burada $y_j'(n)$ dal düğüm noktasını göstermektedir); c) İşaret-akış diyagramı ile gösterilimi.

13.7 KORELASYONLU GÜRÜLTÜ VE LİMİT SALINIMLAR

Sabit-nokta aritmetikte işlem kuvantalanmasında yapılan temel varsayımlardan biri, işaret seviyesinin kuvantalama adımından çok daha büyük olduğu idi. Bu varsayım, gürültü işaretinin noktadan noktaya veya kaynaktan kaynağa istatistiksel olarak bağımsız olduğunu kabul ederek hesap yapmamızı sağladı. Ancak bazı durumlarda yukarıdaki varsayım geçersizdir. Yani, kuvantalama hataları arasında yüksek korelasyon bulunmaktadır. Bu durumda sayısal süzgeç kilitlenip kararsız bir modda çalışarak sürekli bir çıkış osilasyonu elde edilir. Bu kavrama «ölü-bant etkisi» (deadband effect) adı verilir. Şimdi, birinci ve ikinci dereceden IIR süzgeçler için bu özelliği inceleyelim.

13.7.1 Birinci Derece IIR Sayısal Süzgeçlerde Kuvantalama Nedeniyle Limit Salınımlar

a ve b sabit katsayılar olduğuna göre giriş ve çıkış dizileri $x(n)$ ve $y(n)$ olan birinci derece sayısal süzgeç fark denklemi ile

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n) \tag{13.105}$$

olarak tanımlanır. Buradan sayısal süzgecin transfer fonksiyonu,

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1 - az^{-1}} \tag{13.106}$$

olarak bulunur. Süzgecin katsayıları $a = 0.9$, $b = 1.0$ seçelim. Başlangıç koşulu $y(0) = 1$ ve sıfır girişli sistemde ($x(n) = 0$) tüm n için çıkış cevabını hesaplayalım. Eğer sonsuz kelime uzunluğu kullanılıp kuvantalama yapılmaz ise, çıkış dizisi üstel olarak sıfıra yaklaşır. (13.105) denkleminden,

$$\begin{aligned}
y(0) &= 1.0 \text{ (Başlangıç Koşulu)}\\
y(1) &= (0.9)\cdot(1.0) = 0.9\\
y(2) &= (0.9)\cdot(0.9) = 0.81\\
y(3) &= (0.9)\cdot(0.81)=0.729\\
y(4) &= (0.9)\cdot(0.729) = 0.6561\\
y(5) &= (0.9)\cdot(0.6561) = 0.59049\\
&\vdots\\
y(n) &= (0.9)^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Ancak, sonlu kelime uzunluklu aritmetik kullanılır ise, farklı bir dizi elde edilecektir. Önce, çarpım sonucu sayıların en yakın ondalık sayıya yuvarlatıldığını varsayalım. Aşağıdaki ok işareti yuvarlatma işlemini göstermektedir.

$$\begin{aligned}
y(0) &= 1.0\\
y(1) &= (0.9)\cdot(1.0\ ) = 0.9 \to 0.9\\
y(2) &= (0.9)\cdot(0.9\ ) = 0.81 \to 0.8\\
y(3) &= (0.9)\cdot(0.8\ ) = 0.72 \to 0.7\\
y(4) &= (0.7)\cdot(0.63) = 0.63 \to 0.6\\
y(5) &= (0.9)\cdot(0.6\ ) = 0.54 \to 0.5\\
y(6) &= (0.9)\cdot(0.5) = 0.45 \to 0.5\\
y(6) &= (0.9)\cdot(0.5\ ) = 0.45 \to 0.5 \text{ (yukarıya yuvarlatma)}\\
y(7) &= (0.9)\cdot(0.5\ ) = 0.45 \to 0.5\\
&\vdots\\
y(n) &= 0.5
\end{aligned}$$

Eğer $y(6)$ aşağıya doğru yuvarlatılır ise,

$$\begin{aligned}
y(6) &= (0.9)\cdot(0.5) = 0.45 \to 0.4\\
y(7) &= (0.9)\cdot(0.4) = 0.36 \to 0.4\\
&\vdots\\
y(n) &= 0.4
\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde, $y(n)$ çıkış dizisinin belirli bir sayıya gelinceye kadar doğrusal olarak azaldığı ve bir değerden sonra sabit kaldığı görülmektedir. Yuvarlatmanın aşağıya veya yukarıya yapılmasına bağlı olarak değişmeyen değer 0.5 yada 0.4 olmaktadır. Eğer başlangıç koşulu $y(0) = -1$ olarak varsayılsaydı, aynı değerler negatif olarak elde edilecektir.

Eğer $a = -0.9$ ve $y(0) = \mp 1.0$ olarak kabul edilir ise aynı dizi alternatif artı ve eksi işaretiyle elde edilir. Sayısal osilasyon yada limit salınımlar ∓ 0.5 veya ∓ 0.4 değerlerinde ortaya çıkacaktır. Alterne işaretlerin frekansı osilasyon frekansına eşittir. f_s örnekleme frekansı ise $f_0 = (1/2)f_s$ olue.

Eğer $a = 0.9$ için başlangıç koşulları $y(0) = \mp 0.4$, ∓ 0.3, ∓ 0.2, ∓ 0.1 olarak alınır ise, $f_0 = 0$ sabittir. $a = -0.9$ için ise $f_0 = (1/2)f_s$ alterne bulunur. Limit salınım başlangıç koşulunun genliğine eşit olmaktadır. Örneğin, $a = 0.9$, $y(0) = -0.3$ için,

$$\begin{aligned}
y(0) &= -0.3\\
y(1) &= (0.9)\cdot(-0.3) = -0.27 \to -0.3\\
y(2) &= (0.9)\cdot(-0.3) = -0.27 \to -0.3\\
&\vdots\\
y(n) &= -0.3
\end{aligned}$$

$a = -0.9$, $y(0) = -0.3$ için ise,

$$\begin{aligned}
y(0) &= -0.9\\
y(1) &= (-0.9)\cdot(-0.3) = 0.27 \to 0.3\\
y(2) &= (-0.9)\cdot(\ 0.3) = -0.27 \to -0.3\\
y(3) &= (-0.9)\cdot(-0.3) = 0.27 \to 0.3\\
&\vdots\\
y(n) &= (-1)^{n+1}\cdot(0.3)
\end{aligned}$$

Diğer tüm başlangıç koşullarında da (13.112) algoritması ya 0.5 yada 0.4 genliğinde limit salınıma dönüşmektedir. Sabit veya alterne işaret olarak bu limit salınım elde edilir. Herhangi bir sabit-noktalı birinci derece süzgeç gerçekleşmesinde çarpım sonrası yuvarlatma çıkışın sıfıra azalmasına imkan vermez. Bu nedenle, birinci derece yuvarlatma hatalı süzgeçlerde daima arzu edilmeyen bir çıkış vardır [4].

Açık olarak, limit salınım genliği, yuvarlatmanın yapıldığı ondalık yere bağlıdır. Kabul edilebilir bir gürültü seviyesinin altına düşürmek için yeterince doğruluk sağlanmalıdır. Örneğin, yukarıdaki hesaplamalarda yüzdelik yerde yuvarlatma yapılsa, limit salınımlar 0.04 veya 0.05 de oluşur.

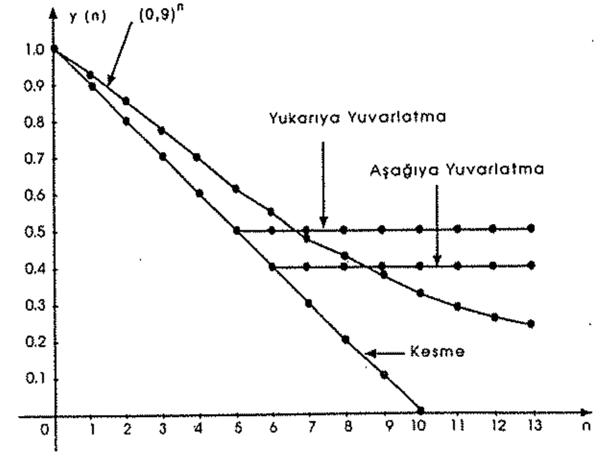
Eğer birinci desimal yerde yuvarlatma yerine kesme (truncation) kullanılır ise, aşağıdaki dizi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&y(0) = 1.0 \text{ (Başlangıç koşulu)}\\
&y(1) = (0.9)\cdot(1.0\ ) = 0.9 \rightarrow 0.9\\
&y(2) = (0.9)\cdot(0.9) = 0.81 \rightarrow 0.8\\
&y(3) = (0.9)\cdot(0.0) = 0.72 \rightarrow 0.7\\
&y(4) = (0.9)\cdot(0.7) = 0.63 \rightarrow 0.6\\
&y(5) = (0.9)\cdot(0.6) = 0.54 \rightarrow 0.5\\
&y(6) = (0.9)\cdot(0.5) = 0.45 \rightarrow 0.4\\
&y(7) = (0.9)\cdot(0.4) = 0.36 \rightarrow 0.3\\
&y(8) = (0.9)\cdot(0.3) = 0.27 \rightarrow 0.2\\
&y(9) = (0.9)\cdot(0.2) = 0.18 \rightarrow 0.1\\
&y(10) = (0.9)\cdot(0.1) = 0.09 \rightarrow 0.0\\
&y(11) = (0.9)\cdot(0.0) = 0.00 \rightarrow 0.0\\
&\quad\vdots\\
&y(n) = 0.0
\end{aligned}
$$

Buradan görüldüğü gibi çıkış doğrusal olarak sıfıra yaklaşmaktadır. Eğer kesme ikinci ondalıkta yapılır ise, $y(n) = 0.09$ noktasına gelinceye kadar aritmetik işlem yaklaşık olarak bulunur. Bu değerden sonra çıkış değerleri doğrusal olarak sıfıra azalır. Eğer başlangıç koşulu $y(0) = -1$ olarak verilir ise, aynı dizi alterne işaretler olarak elde edilir. Ancak, bu durum yüksek dereceden süzgeçler için geçerli değildir. Limit salınım hem yuvarlatma hemde kesme sonucu oluşur. Şekil 13.22'de birinci derece süzgecin yuvarlatma ve kesme hataları sonucu çıkışı görülmektedir.

13.7.2 Birinci Derece Sayısal Süzgeçler İçin Limit Salınım Sınırları

Yukarıda sayısal örneklerde birinci dereceden algoritmaların sınırlı kelime uzunluğu kullanılması durumunda ise doğrusal olarak çıkışın sıfıra yaklaştığı tartışıldı. Şimdi, bu sonuçları genelleştirelim:



Şekil 13.22 Birinci derece, $y(n) = 0.9y(n-1)$, $y(0) = 1.0$ süzgecinde yuvarlatma ve kesme sonucunda bulunan çıkışlar.

a) Yuvarlatma Durumunda

Birinci dereceden IIR süzgeç için limit salınımın sınırı yada maksimum genliği hesaplanabilir. Genellikle, yuvarlatma işlemi şu denklem ile karakterize edilir.

$$[y(n)]_r = y(n) \mp \epsilon_r(n) \tag{13.107}$$

$[\ \ ]_r$ yuvarlatılmış değeri ve $\epsilon_r(n)$'de sınırlı bir pozitif sayıyı göstermektedir. ϵ_{max} kuvantalama seviyesinin genliğini gösterir ise, $\epsilon_r(n) \leqslant (Q/2) = \epsilon_{max}$ yazılabilir. Örnegin, yuvarlatma en yakın yüzdelik sayıya yapılır ise $Q/2 = 0.005$ olur. $x(n) = 0$ için (13.107) bağlantısı (13.105) algoritmasına uygulanır ise,

$$[y(n)]_r = a[y(n-1)]_r \mp \epsilon_r\ (n-1) \tag{13.108}$$

bulunur. Kararlı-durum limit salınımlar başlayınca, genlikler cinsinden $[y(n)]_r = [y(n-1)]_r = y_{ss} > 0$ olur. Ayrıca, $\epsilon_r(n) \leqslant (Q/2)$ hatırlanırsa (13.108)'den

$$y_{ss} \leqslant |a| y_{ss} + (Q/2) \tag{13.109}$$

olarak elde edilir. Buradan, y_{ss}'nin çözülmesiyle sınır formülü bulunur.

$$y_{ss} \leqslant \frac{\epsilon_{max}}{1-|a|} = \frac{\epsilon_{max}}{1-|a|} \tag{13.110}$$

Süzgecin impuls cevabı $h(n) = a^k u(k)$ olduğuna göre

$$y_{ss} \leqslant \frac{\epsilon_{max}}{1-|a|} = \epsilon_{max} \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| \tag{13.111}$$

(13.111)'deki sınır formülünden, yuvarlatma sonucu ortaya çıkan limit salınım sınırı y_{ss} nin, ϵ_{max}'ın süzgecin impuls cevabının mutlak değerlerinin toplamının çarpımıyla elde edildiği görülmektedir. Bu formülasyonun yüksek dereceden algoritmalar için de geçerli olduğu gösterilebilir.

$a = 0.9$ ve $Q = 0.1$ (ondalık yerde yuvarlatma) olduğunda $y_{ss} = 0.5$ limit salınımın genliğini verir. Gerçekten de bu bölümdeki sayısal örneklerin tümünde limit salınımın (13.111) kullanılarak bulunan değeri aşmadığı görülmektedir.

b) Genlik Kesmesi Durumunda

Genellikle kesmesi (truncation) durumunda kesme işlemi,

$$[y(n)]_t = y(n) \mp \epsilon_t(n) \tag{13.112}$$

denklemi ile karakterize edilir. $[\ \ ]_t$ genlik kesmesini ve $\epsilon_t(n)$ sınırlı pozitif bir sayıyı gösterir. $\epsilon_t(n) < Q = \epsilon_{max}$ olup ϵ_{max} kuvantalama seviyesi genliğini gösterir. (13.112)'deki eksi işareti $y(n)$'nin pozitif, artı ise $y(n)$'nin negatif olması durumunda geçerlidir. Örneğin, kesme ondalık basamakta gerçekleştirilirse $\epsilon_t(n) < Q = 0.1$ olur. Eğer kesme yüzdelik basamakta olursa $\epsilon_t(n) < Q = 0.01$ olur.

$x(n) = 0$ için (13.105) algoritmasına kesme uygulanır ise $(b = 1)$,

$$[y(n)]_t = a[y(n-1)]_t \mp \epsilon_t(n-1) \tag{13.113}$$

bulunur. $\epsilon_t(n-1) < Q$ olmaktadır. $|a| < 1$ için, sıfırdan farklı kararlı limit salınım elde edilmez. Sonsuz kelime uzunluklu algoritmanın kararlı olduğu tüm durumlar için bu sonuç geçerlidir.

Farzedelim ki, $0 < |a| < 1$ ve sıfırdan farklı kararlı bir duruma erişilsin; $|y(n)| = |y(n-1)| = y_{ss} > 0$. (13.113)'den

$$y_{ss} < |a| y_{ss} - Q \tag{13.114}$$

veya

$$y_{ss} \leqslant \frac{-Q}{(1-|a|)} \tag{13.115}$$

yazılabilir. Oysa $Q > 0$ ve $0 < |a| < 1$ olduğundan (13.114)'den $y_{ss} < 0$ bulunur. Bu sonuçta ise $y_{ss} > 0$ olma varsayımına ters düşer. Tek mümkün olan kararlı durum çözümü $y_{ss} = 0$ dır.

Tablo 13.2

$y(0)$'ın işareti	a'nın işareti	Limit salınım periyodu
+	+	$f_0 = 0$ (sabit + değer)
−	+	$f_0 = 0$ (sabit − değer)
+	−	$f_0 = (1/2) f_s$ (+,−,+,−,... değerler)
−	−	$f_0 = (1/2) f_s$ (−,+,−,+,... değerler)

O halde, birinci derece algoritmalarda kesme yoluyla yapılan kuvantalamada limit salınım meydana gelmez. Herhangi bir başlangıç koşulu için çıkış

$$|y(n)| \leqslant \frac{Q}{(1-|a|)} \tag{13.116}$$

genliğine düştüğünde doğrusal olarak sıfıra yaklaşır.

13.7.3 İkinci Derece IIR Sayısal Süzgeçlerde Sıfır Giriş İçin Limit Salınım Kavramı

İkinci derece süzgecin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \tag{13.117}$$

olsun. b_1 ve b_2 sabit katsayılarıdır. Buradan,

$$y(n) = -b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2) + x(n) \tag{13.118}$$

olarak yazılabilir. Bu örneklte transfer fonksiyonunun sıfırları dikkate alınmamaktadır. Bu sıfırlar, salınımı direkt olarak etkilememelerine rağmen çıkış işaretindeki limit salınımı etkilerler.

$x(n) = 0$ (sıfır giriş) için, $b_1 = 0.9$, $b_2 = 0.8$ ve başlangıç koşulları $y(0) = y(-1) = 4$ alınırsa (13.118) şöyle yazılır:

$$y(n) = 0.9 y(n-1) - 0.8 y(n-2) \tag{13.119}$$

En yakın tamsayıya yuvarlama yapılarak $(Q/2 = 0.5)$ aşağıdaki değerler bulunur.

$$y(1) = (0.9)\cdot(\ 4) - (0.8)\cdot(\ 4) = (3.6) - (3.2) \rightarrow 4\text{-}3\text{=}1$$
$$y(2) = (0.9)\cdot(\ 1) - (0.8)\cdot(\ 4) = (0.9) - (3.2) \rightarrow 1\text{-}3\text{=-}2$$
$$y(3) = (0.9)\cdot(-2) - (0.8)\cdot(\ 1) = (-1.8) - (0.8) \rightarrow -2\text{-}1\text{=-}3$$
$$y(4) = (0.9)\cdot(-3) - (0.8)\cdot(-2) = -(-2.7) - (-1.6) \rightarrow -3\text{+}2\text{=-}1$$
$$y(5) = (0.9)\cdot(-1) - (0.8)\cdot(-3) = (-0.9) - (-2.4) \rightarrow -1\text{+}2\text{=}1$$
$$y(6) = (0.9)\cdot(\ 1) - (0.8)\cdot(-1) = (0.9) - (-0.8) \rightarrow 1\text{+}1\text{=}2$$
$$y(7) = (0.9)\cdot(\ 2) - (0.8)\cdot(\ 1) = (1.8) - (0.8) \rightarrow 2\text{-}1\text{=}1$$
$$y(8) = (0.9)\cdot(\ 1) - (0.8)\cdot(\ 2) = (0.9) - (1.6) \rightarrow 1\text{-}2\text{=-}1$$
$$y(9) = (0.9)\cdot(-1) - (0.8)\cdot(\ 1) = (-0.9) - (0.8) \rightarrow -1\text{-}1\text{= -}2$$
$$y(10) = (0.9)\cdot(-2) - (0.8)\cdot(-1) = (-1.8) + (0.8) \rightarrow -2\text{+}1\text{=-}1$$
$$y(11) = (0.9)\cdot(-1) - (0.8)\cdot(-1) = (-0.9) - (-1.6) \rightarrow -1\text{+}2\text{=}1$$
$$y(12) = (0.9)\cdot(\ 1) - (0.8)\cdot(-1) = (0.9) - (-0.8) \rightarrow 1\text{+}1\text{=}2$$

Özetle, $y(0) = y(-1) = 4$ başlangıç koşullarından başlayarak aşağıdaki çıkış dizisi elde edilir.

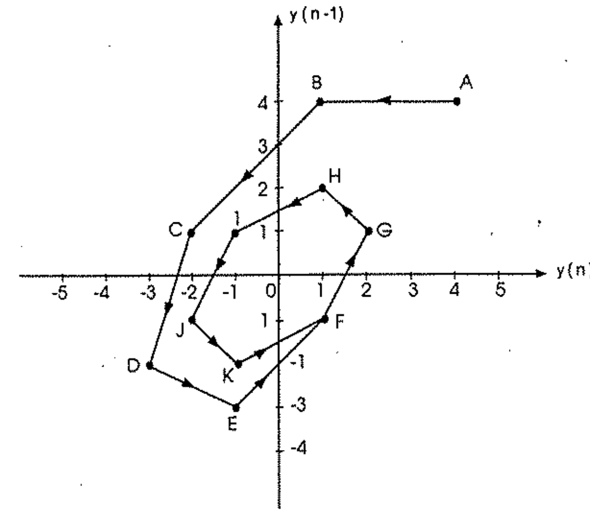
$$\{y(n)\} = \{4, 4, 1, -2, -3, -1, 1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, \ldots\}$$

Buradan da çıkışın limit salınıma geçtiği açık olarak görülmektedir. Tekrar edilen dizi $\{1, 2, 1, -1, -2, 1, 1, 2, 1, \ldots\}$ dizisidir. Sonsuz kelime uzunluğunda çarpma gerçekleştirilmesi durumunda $y(k)$ çıkış dizisi sıfıra yakınsayacaktır.

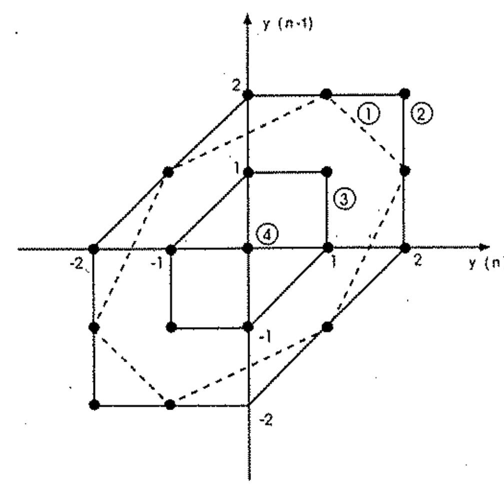
$y(n-1) - y(n)$ düzleminde limit salınımın ortaya çıkışı Şekil 13.23'te görülmektedir. Bu şekil, aşağıdaki noktalar için çizilmiştir. (4,4), (4,1), (1-2), (-2,-3), (-3,-1), (-1,1), (1,2), (2,1), (1,-1), (-1,-2), (-2,-1), (-1,+1), ..., $y(0) = y(-1) = 4$ noktası. Yani, A noktasından başlanır ise, birbirini takip eden B, C, D, E, F, G, H, I, J, K ... noktalarından geçen geçici bir yörüngeden sonra limit salınım, F, G, H, I, J, K da oluşur.

Yukarıdaki örnekte başlangıç koşulunu $y(0) = y(-1) = 4$ noktasında alarak çıkışı belirledik. Oysa, farklı başlangıç koşulları farklı limit salınımlar ortaya çıkaracaktır. Örneğin, $y(-1) = 0$ ve $y(0) = 2$ başlangıç koşulları, (0, 2, 2, 0, -2, 2, 0, 2, 2, 0, ...) dizisini, $y(-1) = 0$ ve $y(0) = 1$ başlangıç koşulları ise (0, 1, 1, 0, -1, 1, 0, 1, 1, 0, ...) dizisini verir.

Tüm bu limit salınımlar Şekil 13.24'te gösterilmiştir.



Şekil 13.23 $y(0) = y(-1) = 4$ başlangıç koşulu için limit salınım oluşumu.



Şekil 13.24 Farklı başlangıç koşulları için limit salınımlar.

REFERANSLAR

1. Digital Signal Processing Committee ed., *Programs for Digital Signal Processing*, IEEE Press, New York, 1979.
2. A. Antoniou, *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1979.
3. R. E. Crochiere, "A New Statistical Approach to the Coefficient Word Length Problem for Digital Filters", *IEEE Trans, Circuits Syst.*, vol. CAS 22, pp. 190-196, March 1975.
4. L. B. Jackson, "Roundoff- Noise Analysis For Fixed - Point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form", *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol AU-18, pp. 107-122, June 1970.
5. S. R. Parker and S.F. Hess, "Limit-Cycle Oscillations in Digital Filters", *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT- 18, pp. 687-697, November 1971.
6. L. B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
7. J. H. Mathews, *Numerical methods using MATLAB*, Prentice Hall, 1999.
8. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing Laboratory using MATLAB*, McGraw-Hill, 1999.

PROBLEMLER

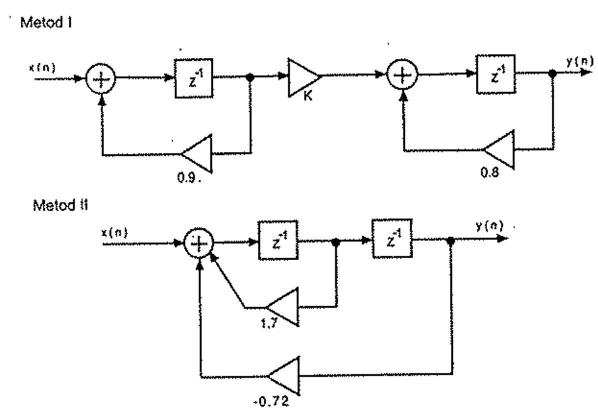
13.1 Bir sayısal süzgeci Şekil 13.25'de gösterildiği gibi iki metoda göre gerçekleştirelim. Sabit noktalı aritmetik kullanıldığı varsayılarak bu iki yapıyı karşılaştırmak istiyoruz. Metod I ve Metod II için,

a) Kayıt edicilerde genliğin biri aşmaması için düzgün dağılımlı girişin maksimum genliğini bulunuz. Ayrıca, metod I için K ölçekleme katsayısını belirleyiniz.

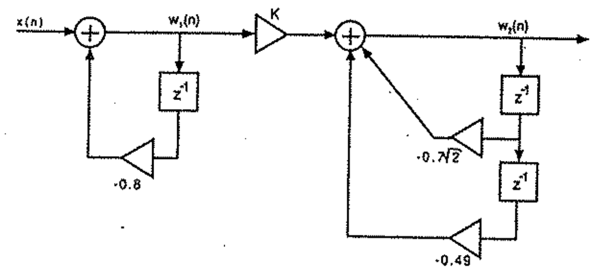
b) Kutupların normal yerlerinin %0.1 civarında kalabilmeleri için gerekli bit sayısını belirleyiniz.

c) (b)'de bulunan bit sayısı için çıkış gürültüsünün korelasyonsuz karesel ortalamasını bulunuz.

d) Aynı bit sayısı için maksimum limit salınım genliğini bulunuz.



Şekil 13.25



Şekil 13.26

13.2 Şekil 13.26'da gösterilen sistemde $x(n)$ işareti düzgün dağılımlı beyaz gürültü (korelasyonsuz) işaretidir. $|w_1(n)| < 1$ olması için,

a) $x(n)$'nin karesel ortalamasını hesaplayınız $(\sigma^2_{x(n)})$.

b) $|w_2(n)| < 1$ olabilmesi için ölçekleme katsayısı K'yı belirleyiniz.

13.3 Sayısal süzgeç transfer fonksiyonu

$$T(z) = \frac{z}{z^2 + az + 1}$$

olarak verilsin. $A = 2\cos\omega_0 T$ olduğuna göre,

a) Bu süzgecin impuls cevabının

$$h(n) = \frac{\sin(n\omega_0 T)}{\sin(\omega_0 T)}$$

biçiminde örneklenmiş sinüs dalgası olduğunu gösteriniz.

b) 1000 Hz'lik örnekleme hızı ile 100 Hz'lik bir sinüs dalgası elde etmek için "a" nın değerini belirleyiniz.

c) Sinüs dalgasının frekansının doğruluğunun 100 $Hz \pm$ %1 olabilmesi için "a" sabitinde gerekli minumum ondalık yeri belirleyiniz. Örnekleme hızının sabit kaldığını ve sonsuz doğrulukta aritmetik kullanıldığını varsayınız.

MATLAB UYGULAMALARI

M13.1 Bu soruda ondalık bir sayının ikili gösterilimine kesme uygulandığında oluşan kuvantalanmış ondalık sayıyı bulan bir MATLAB programını inceleyeceğiz [8]. Aşağıda verilen fonksiyon bu işlemi gerçekleştirmektedir. Ondalık sayı ilk önce ondalık kesirli bir sayıya dönüştürülmektedir. Sonra bu kesirli sayı kelime uzunluğu N bit olmak üzere ikili gösterilime çevrilmektedir. En son olarak kesme uygulanmış bu ikili sayı kuvantalanmış ondalık sayıya çevrilmektedir.

```
function kesme = on_kesme(d,N)
m = 0; d1 = abs(d);
while fix(d1) > 0
    m = m+1;
    d1 = abs(d)/(10^m);
end
kesme = 0;
for n = 1:N
    beq(n)= fix(d1*2);
    kesme = beq(n)*(2^(-n)) + kesme;
    d1 = (d1*2) - fix(d1*2);
end
kesme = sign(d).*kesme.*10^(m);
```

Bu programı kullanarak 0.350 sayısına kesme uyguladığımızda N=3-bit ve N=6-bit için oluşan kuvantalanmış değerler ne olmaktadır?

M13.2 Aşağıdaki MATLAB fonksiyonu önceki soruda gerçekleştirilen kuvantalama işlemini bu kez ikili gösterilime yuvarlama uygulayarak gerçekleştirmektedir [8].

```
function yuvarla = on_yuvarla(d,N)
m = 0; d1 = abs(d);
while fix(d1) > 0
    m = m+1;
    d1 = abs(d)/(10^m);
end
yuvarla = 0; d1=d1+2^(-N-1);
for n = 1:N
    beq(n)= fix(d1*2);
    yuvarla = beq(n)*(2^(-n)) + yuvarla;
    d1 = (d1*2) - fix(d1*2);
end
yuvarla = sign(d).*yuvarla.*10^(m);
```

Bu programı kullanarak 0.350 sayısına yuvarlama uyguladığımızda `N=3`-bit ve `N=6`-bit için oluşan kuvantalanmış değerler ne olmaktadır?

M13.3 Aşağıda verilen MATLAB fonksiyonu ikinci dereceden IIR bir süzgeçte sıfır giriş için yuvarlama sonucu kuvantalamanın neden olduğu limit salınım olayını incelemektedir. Sayıların yuvarlanması sonucu oluşan kuvantalanmış değerleri bulmak için önceki soruda kullandığımız `on_yuvarla` fonksiyonu kullanılmaktadır.

```
%% b_1 ve b_2 katsayılarını giriniz
[b] =input('b_1 ve b_2 katsayıları = ');
%% başlangıç koşullarını giriniz
[y] =input('y(0)  ve y(-1) değerleri =  ');
[b_1]=b(1);  [b_2]=b(2);  [y_1]=y(1);  [y_2]=y(2);
for n = 1:51
    y(n) = - b_1*y_1 - b_2*y_2;
    y(n) = on_yuvarla(y(n),3);
    y_2 = y_1; y_1 = y(n);
end
k = 0:50;
stem(k,y)
ylabel('Genlik'); xlabel('zaman n')
```

Bu fonksiyonu kullanarak süzgeç katsayıları `[b_1 b_2]=[-0.9 0.8]` ve başlangıç koşulları `[y_1 y_2]=[4 4]` için oluşan limit salınım grafiğini çizdiriniz.

Dizin